全國公私立高級中學109學年度指定科目第七次聯合模擬考試

數學甲考科解析

考試日期：110 年 5 月 11~12 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	1	2	35	134	14	34	15	2	3	－	7	3	8
15	16												
1	9												

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 此人患有新冠肺炎且經 PCR 檢驗後為陽性的機率為

$\dfrac{1}{1000}\times 98\%=\dfrac{98}{10^5}$ 。

此人未患有新冠肺炎且經 PCR 檢驗後為陽性的機率為

$\dfrac{999}{1000}\times 4\%=\dfrac{3996}{10^5}$ 。

因此經 PCR 檢驗後為陽性，則此人未患有新冠肺炎的機率為

$\dfrac{3996}{98+3996}=\dfrac{3996}{4094}\approx 97.6\%$ 。故選(5)。

2. ＜方法一＞

$\begin{bmatrix} 4 & 4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -4\sqrt{3} \end{bmatrix}$，因此 $z=4-4\sqrt{3}\,i$。

＜方法二＞

$$\begin{bmatrix} 4 & 4\sqrt{3} \\ -4\sqrt{3} & 4 \end{bmatrix}=8\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$=8\begin{bmatrix} \cos(-60^\circ) & -\sin(-60^\circ) \\ \sin(-60^\circ) & \cos(-60^\circ) \end{bmatrix},$$

此矩陣為旋轉 -60° 且伸張為 8 倍的平面變換，

因此 $z=8\,[\cos(-60^\circ)+i\sin(-60^\circ)]$

$=8\,(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i)=4-4\sqrt{3}\,i$ 。故選(1)。

3. 如右圖，因為 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DF}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ ，

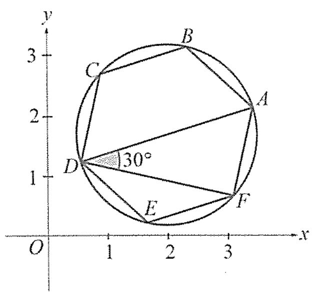
且 $\angle FDA=30^\circ$，所以

$\dfrac{z_4-z_1}{z_6-z_4}=-\dfrac{z_1-z_4}{z_6-z_4}$

$=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ)$

$=\dfrac{-2}{\sqrt{3}}(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i)$

$=-1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$ 。故選(2)。



二、多選題

4. 租一台遊覽車需 9000 元，搭計程車往返一趟需 1040 元。

32 人以下時，計程車費用小於或等於 8320 元，低於遊覽車費用 9000 元。

33 至 43 人時，計程車費用大於或等於 9360 元，高於遊覽車費用 9000 元。

44 至 68 人時，計程車費用小於或等於 17680 元，低於遊覽車費用 18000 元。

69 至 86 人時，計程車費用大於或等於 18720 元，高於遊覽車費用 18000 元。

87 至 100 人時，計程車費用小於或等於 26000 元，低於遊覽車費用 27000 元。

101 至 129 人時，計程車費用大於或等於 27040 元，高於遊覽車費用 27000 元。

故選(3)(5)。

5. 令圓心 (0 , 0) 為 O，

直線 AB 方程式為 $y=-3$，

直線 BC 方程式為 $x=2$，

直線 AC 方程式為 $2x-y+5=0$。

$\overline{OA}=5$，$\overline{OB}=\sqrt{13}$，

$\overline{OC}=\sqrt{85}$，

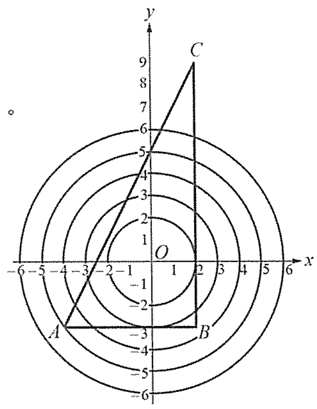
O 到直線 AB 的距離為 3，

O 到直線 BC 的距離為 2，

O 到直線 AC 的距離為

$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$ 。

作圖如右，



r 值與對應的交點個數如下表。

r 值	2	3	4	5	6
交點個數	1	5	4	3	2

故選(1)(3)(4)。

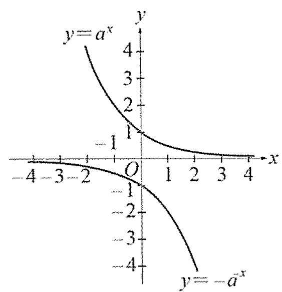
6. (1) ○：$a^b<a^1<1=b^0<b^a$。

(2) ×：反例：若 $a=\dfrac{1}{4}$ 且 $b=2$，

則 $\log_a b=\dfrac{-1}{2}$，$\log_b a=-2$。

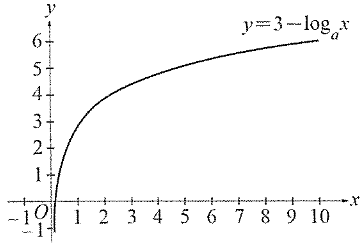
(3) ×：$y=a^x$ 與 $y=-a^{-x}$ 的函數圖形如下，

兩者對稱於原點，並不對稱於直線 $y=-x$。



(4) ○：$0<a<1$，$y=3-\log_a x$ 的函數圖形如下，

從中任取相異兩點連成一條直線，其斜率必為正數。



(5) ×：承(4)圖形，$y=3-\log_a x$ 函數圖形的凹口向下，

因此對於任意相異的 x_1 , x_2，

均有 $f\,(\dfrac{px_1+qx_2}{p+q})>\dfrac{p\,f(x_1)+q\,f(x_2)}{p+q}$ 。

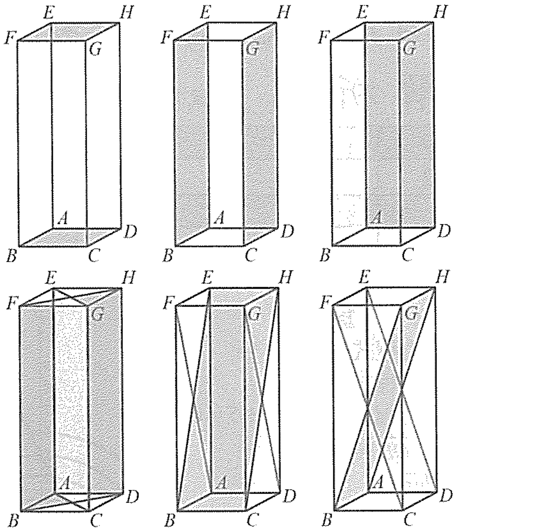
故選(1)(4)。

7. (1) ×：四點共平面的情況有以下 12 種，

因此所求機率為 $\dfrac{12}{C_4^8}=\dfrac{12}{70}=\dfrac{6}{35}$ 。

$ABCD$, $EFGH$，$ABFE$, $CDHG$，$ADHE$, $BCGF$，

$ACGE$, $BDHF$，$AFGD$, $BEHC$；$AHGB$, $DEFC$。



(2) ×：$|\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}|=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AE}|\sin 90°=4\times 12=48$，

$\dfrac{48}{3}=16$，因此 $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AE}=16\overrightarrow{AB}$。

(3) ○：$\overline{AG}=\sqrt{3^2+4^2+12^2}=13$，

因此 G 點的坐標為 $(0,0,13)$。

(4) ○：長方體任意放置在空間坐標中，不影響 G 點與平面 BDE 的距離。定各點坐標為 $A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$D(0,4,0)$，$E(0,0,12)$，$G(3,4,12)$。平面 BDE 方程式為 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{12}=1$

$\Rightarrow 4x+3y+z-12=0$，G 點與平面 BDE 的距離為 $\dfrac{|12+12+12-12|}{\sqrt{4^2+3^2+1^2}}=\dfrac{24}{\sqrt{26}}$。

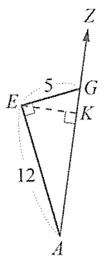
(5) ×：考慮直角三角形 AEG，作 $\overline{EK}$ 垂直斜邊 $\overline{AG}$ 於 K 點，

$\triangle AEG=\dfrac{1}{2}\times 5\times 12=\dfrac{1}{2}\times 13\times\overline{EK}$

$\Rightarrow\overline{EK}=\dfrac{60}{13}\Rightarrow\overline{AK}=\dfrac{144}{13}$，

E,K 兩點的 z 坐標相同，

所以 E 點的 z 坐標為 $\dfrac{144}{13}$。



故選(3)(4)。

8. (1) ○：$\lim\limits_{x\to 0^+}[x^2]=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}[x^2]=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}[x^2]$ 存在。

(2) ×：$\lim\limits_{x\to 0^+}([x]^2)=0^2=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}([x]^2)=(-1)^2=1$，

$\lim\limits_{x\to 0}([x]^2)$ 不存在。

(3) ×：反例：$\begin{cases} f(x)=1, & x>0 \\ f(x)=0, & x<0 \end{cases}$，

$\lim\limits_{x\to 0}([x]\cdot f(x))$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在。

(4) ×：反例：$f(x)=0$，$x\in R$ 但 $x\neq 0$。

$\lim\limits_{x\to 0}([x]\cdot f(x))$ 存在，$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在。

(5) ○：$\lim\limits_{x\to 0^+}([x]x)=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}([x]x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}[x]x$ 存在，所以

$\lim\limits_{x\to 0}([x]\cdot(f(x)+x))=\lim\limits_{x\to 0}([x]f(x)+[x]x)$ 存在。

故選(1)(5)。

三、選填題

A. 所求為 $\dfrac{1}{3}\times(5+3+3)-\dfrac{1}{3}\times(5+3+1)=\dfrac{1}{3}\times(3-1)=\dfrac{2}{3}$。

	答案為(3)	答案為(4)	答案為(3)(4)
畫卡畫(3)(4)時的得分	3 分	3 分	5 分
畫卡畫(3)時的得分	5 分	1 分	3 分

B. 坐標化可知，$B(2,0)$，$C(-1,\sqrt{3})$，

$\overrightarrow{AE}=(1-m)\overrightarrow{AB}=(1-m)(2,0)=(2-2m,0)$，

$\overrightarrow{AD}=(1-n)\overrightarrow{AC}=(1-n)(-1,\sqrt{3})=(n-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}n)$，

又 $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}=(n-3,\sqrt{3}-\sqrt{3}n)\cdot(3-2m,-\sqrt{3})$

$=6n+6m-2mn-12=-2mn-9$。

因為 $\dfrac{m+n}{2}\geq\sqrt{mn}$，所以 $mn\leq\dfrac{1}{16}$

$\Rightarrow\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}\geq\dfrac{-73}{8}$，故最小值為 $\dfrac{-73}{8}$。

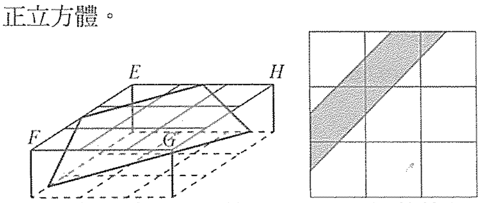
C. 定義此大正方體由 $x=0$，$x=3$，$y=0$，$y=3$，$z=0$，$z=3$ 此六個平面所圍成，A,G 點坐標分別為 $(0,0,0)$ 與 $(3,3,3)$，因此 $\overline{AG}$ 的垂直平分面為 $x+y+z=4.5$。

考慮最上層（介於 $z=2$ 與 $z=3$ 之間）的 9 塊小正立方體，

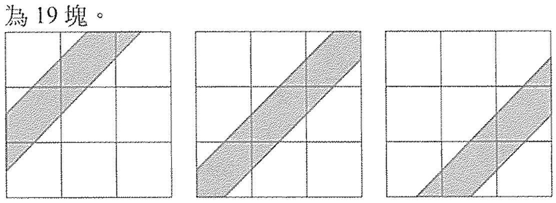
當 $z=3$ 時，代入 $x+y+z=4.5$ 可得 $x+y=1.5$，

當 $z=2$ 時，代入 $x+y+z=4.5$ 可得 $x+y=2.5$。

其立體圖與俯視圖如下，此時平面 $x+y+z=4.5$ 通過 6 塊小正立方體。



依此類推，由上而下第一、二、三層的俯視圖如下，此時平面 $x+y+z=4.5$ 通過的小正立方體塊數依序為 6，7，6 塊，$6+7+6=19$，平面 $x+y+z=4.5$ 通過的小正立方體塊數合計為 19 塊。



第貳部分：非選擇題

一、(1) $iz+1+i$；(2) $-iz+1-i$；(3) 如解析。

【詳解】

(1) $(z-i)(\cos 90°+i\sin 90°)+i$（2 分）

$=(z-i)\times i+i$（1 分）

$=iz+1+i$，C 點所對應的複數為 $iz+1+i$。（1 分）

(2) $(z-(-i))(\cos(-90°)+i\sin(-90°))+(-i)$（2 分）

$=(z+i)\times(-i)-i$（1 分）

$=-iz+1-i$，E 點所對應的複數為 $-iz+1-i$。（1 分）

(3) $\dfrac{(iz+1+i)+(-iz+1-i)}{2}=1$，（2 分）

複數 1 的對應點的坐標為 $(1,0)$，此即為 F 點的坐標。因此當睡著的小狗（A 點）的坐標改變，雖然 C,E 兩點的坐標會改變，但是 $\overline{CE}$ 中點 F 的坐標仍為 $(1,0)$。

（2 分）

二、(1) 0；(2) 0；(3) 56。

【詳解】

(1) 因為 $f'(4)=0$，

所以 $x=4$ 為二次多項式 $f(x)$ 的對稱軸，（2 分）

因此 $f(6)=f(2)\Rightarrow f(6)-f(2)=0$。（2 分）

(2) 因為 $x=4$ 為二次多項式 $f(x)$ 的對稱軸，（2 分）

所以 $f'(0)=-f'(8)\Rightarrow f'(0)+f'(8)=0$（2 分）

(3) 因為 $g(4)=\int_4^4 f(t)\,dt+7=7$

且 $g''(4)=f'(4)=0$，

所以 $(4,7)$ 為三次多項式 $g(x)$ 的反曲點。（2 分）

反曲點為對稱中心，移多補少可將所求區域的積分補成長方形（1 分），因此 $\int_0^8 g(x)\,dx=8\times 7=56$。（1 分）