數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(3)	(5)	(1)	(1)(2)(4)	(2)(3)	(1)(2)(4)	(4)(5)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：能求得曲線的切線方程式

解析：$f'(x)=3x^2-1$

若 $f'(x)=11$，則 $3x^2-1=11 \Rightarrow x=\pm 2$

故曲線與切線的切點為 $(2, f(2))$ 或 $(-2, f(-2))$

$f(2)=2^3-2=6$，$f(-2)=(-2)^3-(-2)=-6$

故切點坐標為 $(2, 6)$ 或 $(-2, -6)$

可得切線方程式為 $y-6=11(x-2)$ 或 $y+6=11(x+2)$

即 $11x-y=16$ 或 $11x-y=-16$

故選(3)。

2. (5)

出處：選修數學甲(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值的定義與求法

解析：$P(3\text{ 白 }1\text{ 黑})=\dfrac{\overbrace{C^3_2}^{\text{甲 2 白}}\times\overbrace{C^1_1\times C^2_1}^{\text{乙 1 白 1 黑}}}{C^5_2\times C^3_2}=\dfrac{3\times1\times2}{10\times3}=\dfrac{1}{5}$

$P(1\text{ 白 }3\text{ 黑})=\dfrac{\overbrace{C^3_1\times C^2_1}^{\text{甲 1 白 1 黑}}\times\overbrace{C^2_2}^{\text{乙 2 黑}}+\overbrace{C^2_2}^{\text{甲 2 黑}}\times\overbrace{C^1_1\times C^2_1}^{\text{乙 1 白 1 黑}}}{C^5_2\times C^3_2}=\dfrac{3\times2\times1+1\times1\times2}{10\times3}=\dfrac{4}{15}$

$P(4\text{ 黑})=\dfrac{\overbrace{C^2_2}^{\text{甲 2 黑}}\times\overbrace{C^2_2}^{\text{乙 2 黑}}}{C^5_2\times C^3_2}=\dfrac{1\times1}{10\times3}=\dfrac{1}{30}$

期望值 $E=50\times\dfrac{1}{5}+40\times\dfrac{4}{15}+100\times\dfrac{1}{30}=24$ (元)

故選(5)。

3. (1)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：線性變換的意義與應用

解析：設點 $(t, -t)$ 在直線 $x+y=0$ 上，t 為任意實數

則 $\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} at-ct \\ bt-dt \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (a-c)t \\ (b-d)t \end{bmatrix}$

將點 $((a-c)t, (b-d)t)$ 代入 $x-y=0$

$\Rightarrow (a-c)t-(b-d)t=0$

$\Rightarrow (a-c-b+d)t=0$

所以 $a-c-b+d=0$，得 $a+d=b+c$

故選(1)。

註：選項(2)(3)(5)的反例為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

選項(4)的反例為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

二、多選題

4. (1)(2)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：利用除法原理處理餘式問題、多項式恆等定理的應用

解析：$x^3-3x^2+2x=x(x^2-3x+2)=x(x-1)(x-2)$

由除法原理可設 $f(x)=x(x-1)(x-2)q(x)+r(x)$

故 $f(0)=r(0)$，$f(1)=r(1)$，$f(2)=r(2)$

令 $f(0)=f(1)=f(2)=k$

$\therefore r(0)=r(1)=r(2)=k$

且 $\deg(r(x))\leq 2$，故 $r(x)=k$

(1) ○：$f(0)=r(0)=k$

(2) ○：$r(1)=r(2)=k$

(3) ╳：$r(x)$ 為常數多項式

(4) ○：$r(0)=r(4)=k$

(5) ╳：$f(4)=4\times3\times2\times q(4)+r(4)$，只有當 $q(4)=0$ 時，$f(4)$ 才會等於 $r(4)$

故選(1)(2)(4)。

5. (2)(3)

出處：第二冊第三章〈機率〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：古典機率的計算、向量內積、夾角的求法

解析：(1) ╳：若 θ 為直角，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow (m,n)\cdot(1,-2)=0\Rightarrow m-2n=0\Rightarrow m=2n$

m	2	4	6
n	1	2	3

故機率為 $p=\dfrac{3}{6\times6}=\dfrac{1}{12}$

(2) ○：若 θ 為銳角，則 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}>0\Rightarrow m-2n>0\Rightarrow m>2n$

m	3～6	5～6
n	1	2

故機率為 $p=\dfrac{4+2}{6\times6}=\dfrac{1}{6}<\dfrac{1}{2}$

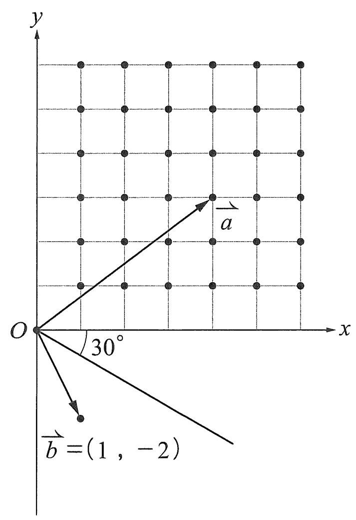
(3) ○：若 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}<-1\Rightarrow m-2n<-1\Rightarrow m<2n-1$

m	1～2	1～4	1～6	1～6	1～6
n	2	3	4	5	6

故機率為 $p=\dfrac{2+4+3\times6}{6\times6}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}$

(4) ╳：由右圖可知，

$\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 的夾角 θ 一定大於 30°



(5) ╳：由(4)的圖可知，

當 $\overrightarrow{a}=(6,1)$ 時，$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的投影長最長

此時 $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}$ 有最大值 $6\times1+1\times(-2)=4$

且 $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$

$=\dfrac{4}{\sqrt{37}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{185}}<\dfrac{4}{12}=\dfrac{1}{3}$

故選(2)(3)。

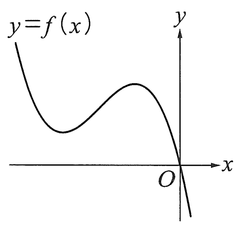
6. (1)(2)(4)

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

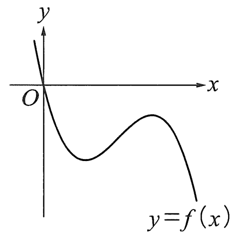
目標：了解三次多項式函數圖形的分類及係數正負的判斷

解析：$y=f(x)$ 的可能圖形如下：

① $b^2-3ac>0$

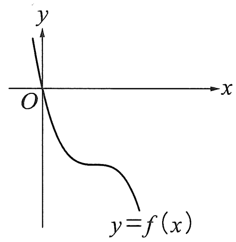


圖㈠

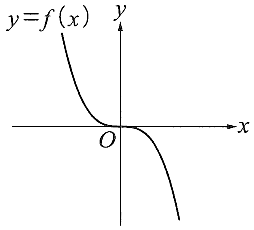


圖㈡

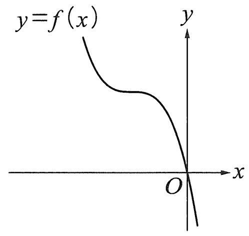
② $b^2-3ac=0$



圖㈢

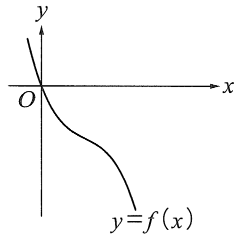


圖㈣

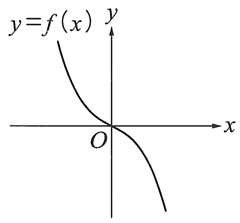


圖㈤

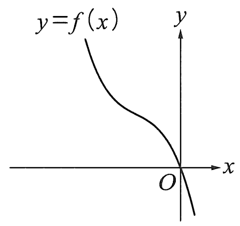
③ $b^2-3ac<0$



圖㈥



圖㈦



圖㈧

(1) ○：不論是哪一張圖，最右側均往下 $\Rightarrow a<0$

(2) ○：不論是哪一張圖均通過原點 $(0, 0) \Rightarrow d=0$

(3) ╳：圖㈠、圖㈡均為 $b^2-3ac>0$

(4) ○：$f'(0)=c \Rightarrow c$ 為 $y=f(x)$ 圖形在 $x=0$ 處的切線斜率

除了圖(四)的 $c=0$ 之外，其餘 $c<0$

(5) ╳：$f''(0)=2b \Rightarrow b$ 為 $y=f(x)$ 圖形在 $x=0$ 處的凹口方向

圖㈡、圖㈢、圖㈥在 $x=0$ 處的凹口向上 $\Rightarrow b>0$

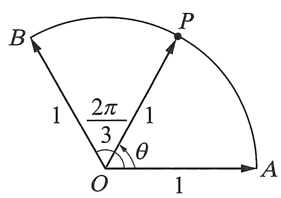
故選(1)(2)(4)。

7. (4)(5)

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：向量的基本運算、極坐標的概念、正餘弦函數疊合處理、三角函數的極值

解析：$0 \le \theta \le \dfrac{2\pi}{3}$



$\overrightarrow{OA}=(1, 0)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}, \sin\dfrac{2\pi}{3}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，

$\overrightarrow{OP}=(\cos\theta, \sin\theta)$

$\because \overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow (\cos\theta, \sin\theta)=x(1, 0)+y\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\theta=x-\dfrac{1}{2}y \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$$

(1) ╳ (2) ╳：由② $\Rightarrow y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$

代入①得 $x=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta$

(3) ╳：$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta=1\Rightarrow\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 或 $\dfrac{2\pi}{3}$

$x=\cos\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

或 $x=\cos\dfrac{2\pi}{3}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$

(4) ○：$x=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\theta\right)$

$=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Rightarrow\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=1\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}$

$y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(5) ○：$x+y=\cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

$=2\left(\dfrac{1}{2}\cos\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)=2\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\dfrac{\pi}{6}\sin\theta\right)$

$=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)\le 2$（當 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 時，等號成立）

故選(4)(5)。

三、選填題

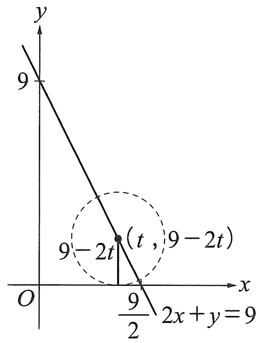
A. 3

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能利用圓與 x 軸或 y 軸相切時的特質找出半徑的最大值

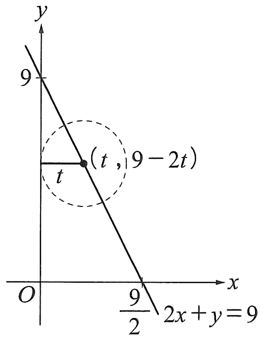
解析：設圓 Γ 在直線 $2x+y=9$ 上的圓心 $C(t\,,9-2t)$，t 為實數

(1)當 $t\ge 9-2t$ 時，即 $t\ge 3$



半徑的最大值為 $9-2t\le 3$

(2)當 $t<9-2t$ 時，即 $t<3$



半徑的最大值為 $t<3$

由(1)、(2)可知，當 $t=3$ 時，圓 Γ 半徑有最大值為 3

B. $(2, 3, 1)$

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數函數的基本概念與運算的性質

解析：$\begin{cases} 4=a\log_b 2+c \\ 7=a\log_b 4+c \\ 10=a\log_b 8+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4-c=a\log_b 2 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 7-c=2a\log_b 2 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ 10-c=3a\log_b 2 \cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

由 $\frac{②}{①}$ 得 $\frac{7-c}{4-c}=2 \Rightarrow 7-c=8-2c \Rightarrow c=1$，代回①、②、③均得

$a\log_b 2=3 \Rightarrow \log_b 2^a=3 \Rightarrow 2^a=b^3$ $\quad\therefore$ 序組 $(m, n, k)=(2, 3, 1)$。

C. 3

出處：選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：複數的基本運算、複數絕對值的幾何意義

解析：設 $z=a+bi$

則 $z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$ 為純虛數

$\therefore a+\frac{a}{a^2+b^2}=0 \Rightarrow a\left(1+\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow z$ 在虛軸 (y 軸)上

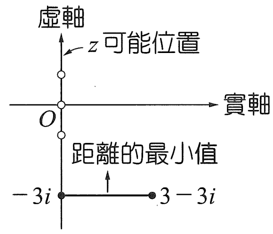
又 $b-\frac{b}{a^2+b^2}\neq 0 \Rightarrow b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)\neq 0 \Rightarrow b\neq 0$ 且 $a^2+b^2\neq 1$ ($|z|\neq 1$)

$\Rightarrow z$ 不在實軸 (x 軸)上且與原點距離不是 1

$\therefore z$ 在虛軸上但扣除 i，$-i$，0 三點

而 $|z-3+3i|=|z-(3-3i)|$ 表示 z 與 $3-3i$ 的距離

如右圖所示，當 $z=-3i$ 時，$|z-3+3i|$ 有最小值 3



D. $\frac{\sqrt{7}}{28}$

出處：第三冊第一章〈三角〉、選修數學甲(上)第二章〈三角函數〉

目標：能利用餘弦定理求得角度並利用三角函數表示線段長

解析：連接 $\overline{CE}$ $\quad\because \angle ABC=\angle ACD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$

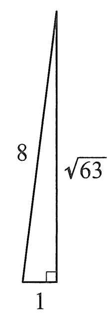
又 $\angle ABC=\angle CED$ ($\because A$，B，C，E 為圓內接四邊形)

$\therefore \angle ABC=\angle ACD=\angle CED$

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos\angle ABC=\frac{4^2+5^2-6^2}{2\times4\times5}=\frac{1}{8}$

在直角 $\triangle ACD$ 中，$\overline{CD}=\overline{AC}\times\cos\angle ACD=6\times\frac{1}{8}=\frac{3}{4}$

在直角 $\triangle CDE$ 中，$\overline{DE}=\overline{CD}\times\cot\angle CED=\frac{3}{4}\times\frac{1}{\sqrt{63}}=\frac{\sqrt{7}}{28}$



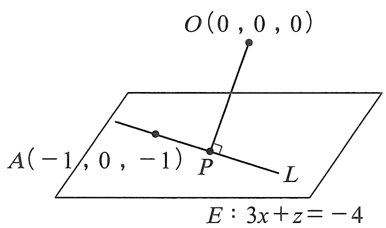
第貳部分：非選擇題

一、(1)否，理由略；(2)否，理由略；(3) $\left(-\frac{6}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right)$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：了解投影點的意義及空間中直線方程式的求法

解析：設 $A(-1, 0, -1)$，依題意可得下圖



(1)將點 $(-1, 1, 0)$ 代入 $E：3x+z=-4$ 得 $-3+0=-3\neq-4$，不在平面 E 上

而直線 L 在平面 E 上，故點 $(-1, 1, 0)$ 不可能為投影點 P。

(2)將點 $(-2, 0, 2)$ 代入 E：$3x+z=-4$ 得 $-6+2=-4$，表示此點在平面 E 上

令 $B(-2, 0, 2)$，則 $\overrightarrow{OB}=(-2, 0, 2)$，$\overrightarrow{AB}=(-1, 0, 3)$

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=2+6=8\neq 0$

故點 $B(-2, 0, 2)$ 不可能為投影點 P。

(3)設 $P(x, y, z)$，則 $\overrightarrow{AP}=(x+1, y, z+1)$，$\overrightarrow{OP}=(x, y, z)$

$\because \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0 \Rightarrow x(x+1)+y^2+z(z+1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+x+z=0$ ……………①

又點 P 在平面 E 上 $\Rightarrow 3x+z=-4$ …………………②

且 $\overline{OP}=\sqrt{\dfrac{8}{5}} \Rightarrow x^2+y^2+z^2=\dfrac{8}{5}$ ………………………③

將③代入①得 $x+z=-\dfrac{8}{5}$ …………………………④

由②、④解得 $x=-\dfrac{6}{5}$，$z=-\dfrac{2}{5}$，代回③得 $y=0$

故點 P 坐標為 $\left(-\dfrac{6}{5}, 0, -\dfrac{2}{5}\right)$。

二、(1)說明略；(2) $a_n=a^{2^{n-1}}$；(3) $\dfrac{1}{3}$，證明略

出處：選修數學甲(下)第二章〈多項式函數的微積分〉

目標：上和、下和與曲線下面積關係的應用

解析：(1)點 Q_n 為 Γ 上的點，且 Q_n 的 x 坐標為 a_n，則 $Q_n(a_n, a_n^2)$

點 P_{n+1} 與 Q_n 的 y 坐標相同，且點 P_{n+1} 在 L 上，則 $P_{n+1}(a_n^2, a_n^2)$

點 Q_{n+1} 與 P_{n+1} 的 x 坐標相同，且點 Q_{n+1} 在 Γ 上，則 $Q_{n+1}(a_n^2, a_n^4)$

故點 Q_{n+1} 的 x 坐標 $=a_n^2=$ 點 Q_n 的 y 坐標。

(2)由(1)，點 Q_{n+1} 的 x 坐標為 a_n^2，可知 $a_{n+1}=a_n^2$

又 $a_1=a$

$\therefore a_2=a^2$

$a_3=(a^2)^2=a^4=a^{2^2}$

$a_4=(a^4)^2=a^8=a^{2^3}$

$a_5=(a^8)^2=a^{16}=a^{2^4}$

⋮

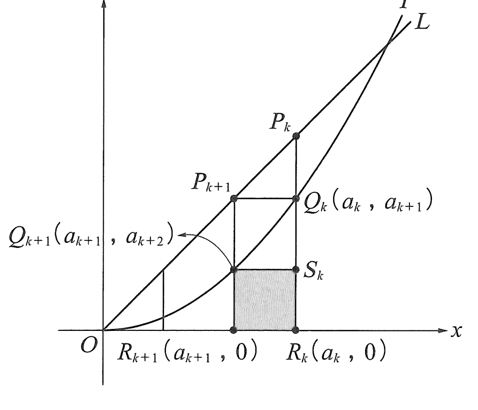
$a_n=a^{2^{n-1}}$。

(3)① $\int_0^1 x^2dx=\dfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\dfrac{1}{3}$。

②設 Q_n 在 x 軸上的投影點為 R_n，

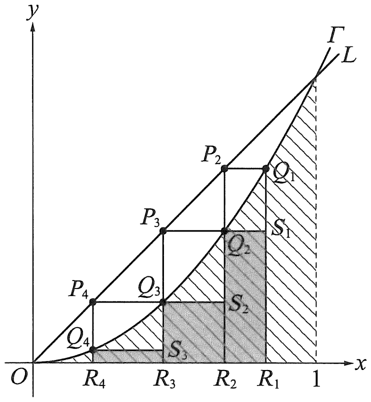
過 Q_{k+1} 作平行 x 軸的直線交 $\overline{P_kR_k}$ 於 S_k

則矩形 $Q_{k+1}R_{k+1}R_kS_k$ 的面積為 $(a_k-a_{k+1})a_{k+2}$



$\therefore \sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}$ 表示 n 個矩形面積的和(圖中陰影處)

其必小於 $y=x^2$ 在 $[0,1]$ 之間曲線下的面積(圖中斜線處)，如下圖所示



故 $\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})a_{k+2}<\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$ 。

非選擇題批改原則

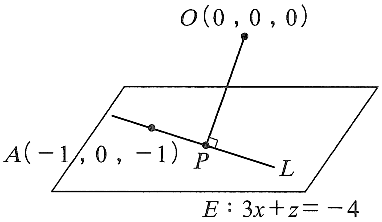
第貳部分：非選擇題

一、⑴否，理由略；⑵否，理由略；⑶ $\left(-\frac{6}{5},0,-\frac{2}{5}\right)$

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：了解投影點的意義及空間中直線方程式的求法

解析：設 $A(-1,0,-1)$，依題意可得下圖



⑴將點 $(-1,1,0)$ 代入 $E：3x+z=-4$ 得 $-3+0=-3\neq-4$，不在平面 E 上　(1 分)

而直線 L 在平面 E 上，故點 $(-1,1,0)$ 不可能為投影點 P。(1 分)

⑵將點 $(-2,0,2)$ 代入 $E：3x+z=-4$ 得 $-6+2=-4$，表示此點在平面 E 上　(1 分)

令 $B(-2,0,2)$，則 $\overrightarrow{OB}=(-2,0,2)$，$\overrightarrow{AB}=(-1,0,3)$　(1 分)

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AB}=2+6=8\neq0$　(1 分)

故點 $B(-2,0,2)$ 不可能為投影點 P。(1 分)

⑶設 $P(x,y,z)$，則 $\overrightarrow{AP}=(x+1,y,z+1)$，$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$

$\because \overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}=0\Rightarrow x(x+1)+y^2+z(z+1)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+x+z=0$ ……………① (1 分)

又點 P 在平面 E 上 $\Rightarrow 3x+z=-4$ …………………② (1 分)

且 $\overline{OP}=\sqrt{\frac{8}{5}}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=\frac{8}{5}$ ………………………③ (1 分)

將③代入①得 $x+z=-\frac{8}{5}$ ……………………………④

由②、④解得 $x=-\frac{6}{5}$，$z=-\frac{2}{5}$，代回③得 $y=0$　(2 分)

故點 P 坐標為 $\left(-\frac{6}{5},0,-\frac{2}{5}\right)$。(1 分)