數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(1)	(4)	(4)	(2)	(5)	(3)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(4)(5)	(2)(4)(5)	(1)(3)	(1)(3)(4)	(1)(3)(4)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：無理數數值的估計

解析：$\because 44^2<2021<45^2$

$\therefore 44<\sqrt{2021}<45$

$\Rightarrow 154<110+\sqrt{2021}<155$

$\Rightarrow 12<\sqrt{110+\sqrt{2021}}<13$

故選(2)。

2. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：無理數的估計、絕對值的意義

解析：因為 $\sqrt{147}=12.\cdots\cdots$

所以 $|x-\sqrt{147}|<6\Rightarrow -6+\sqrt{147}<x<6+\sqrt{147}$

$\Rightarrow 6.\cdots\cdots<x<18.\cdots\cdots$

$\Rightarrow x=7，8，\cdots\cdots，18$

因為 $\sqrt{32}=5.\cdots\cdots$

所以 $|x-\sqrt{32}|>5\Rightarrow x<-5+\sqrt{32}$ 或 $x>5+\sqrt{32}$

$\Rightarrow x<0.\cdots\cdots$或$x>10.\cdots\cdots$

$\Rightarrow x=0，-1，-2，\cdots\cdots$或$x=11，12，13，\cdots\cdots$

因此，滿足條件的整數 $x=11，12，\cdots\cdots，18$，

共有 8 個

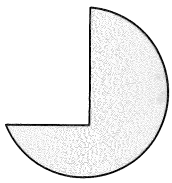
故選(1)。

3. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：兩集合的差集

解析：依題述的操作，所得圖形為圓形捨去與正方形重疊的部分，如右圖



故選(4)。

4. (4)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：對數的運算

解析：設 40 分貝、70 分貝的聲音強度分別為 I_1、I_2 $(\mathrm{W/m^2})$

則 $40=10\log\dfrac{I_1}{I_0}\cdots\cdots①$

$70=10\log\dfrac{I_2}{I_0}\cdots\cdots②$

②－①得 $70-40=10\left(\log\dfrac{I_2}{I_0}-\log\dfrac{I_1}{I_0}\right)$

$\Rightarrow 3=\log\dfrac{I_2}{I_1}\Rightarrow\dfrac{I_2}{I_1}=10^3=1000$

當 $n>1000$ 時，音量會大於 70 分貝，可能使聽力受損

則使聽力不會受損的最大整數 n 值為 1000

故選(4)。

5. (2)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理、餘式定理及多項式係數總和與代值之間的關係

解析：由餘式定理知 $f(2)=-5$

設 $(x+1)f(x)=(x^3-3)(ax+b)+3x-1$

$x=2$ 代入得 $3\cdot f(2)=5(2a+b)+5$

$\Rightarrow 2a+b=-4\ \cdots\cdots①$

$x=-1$ 代入得 $0\cdot f(-1)=(-4)(-a+b)-4$

$\Rightarrow -a+b=-1\cdots\cdots②$

由①、②解得 $a=-1$，$b=-2$

即 $(x+1)f(x)=(x^3-3)(-x-2)+3x-1$

多項式 $f(x)$ 的各項係數和為 $f(1)$

$x=1$ 代入得 $2\cdot f(1)=(-2)(-3)+2\Rightarrow f(1)=4$

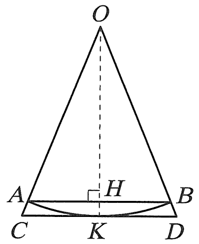
故選(2)。

6. (5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：認識三角比的定義

解析：觀察以正 $4n$ 邊形的一邊所圍出的三角形，如下圖



$\because$ 正 $4n$ 邊形把圓周角做 $4n$ 等分

$\therefore \angle AOH=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{360^\circ}{4n}=\dfrac{45^\circ}{n}$

在$\triangle OAH$ 中 $\because \overline{OA}=1$ $\therefore \overline{AH}=\sin\dfrac{45^\circ}{n}$

$\overline{AB}=2\overline{AH}$ 為圓內接正 $4n$ 邊形的邊長

$\Rightarrow$ 圓內接正 $4n$ 邊形的周長為 $8n\sin\dfrac{45^\circ}{n}$

在$\triangle OCK$ 中 $\because \overline{OK}=1$ $\therefore \overline{CK}=\tan\dfrac{45^\circ}{n}$

$\overline{CD}=2\overline{CK}$ 為圓外切正 $4n$ 邊形的邊長

$\Rightarrow$ 圓外切正 $4n$ 邊形的周長為 $8n\tan\dfrac{45^\circ}{n}$

依題述，2π 的近似值為

$$\frac{1}{2}\times\left(8n\sin\frac{45^\circ}{n}+8n\tan\frac{45^\circ}{n}\right)=4n\left(\sin\frac{45^\circ}{n}+\tan\frac{45^\circ}{n}\right)$$

故選(5)。

7. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：使用排列組合求古典機率

解析：將電腦抽出的數字視為「三個各別選定的 0 到 9 的數字」

故所有樣本點個數 $n(S)=10^3$

設翰翰的小卡上所寫的數字為 a，則中獎的機率為

「三個數字中有選中 a 的機率」

即「全部－沒選中 a 的機率」

中獎機率為 $1-\dfrac{9^3}{10^3}=0.271$

故選(3)。

〈另解〉

就電腦抽出數字為三同 (a, a, a)、兩同一異 (a, a, x) 或 (a, x, x)、三異 (a, x, y) 討論

中獎機率為 $\dfrac{1+2\times C_1^9\times\frac{3!}{2!}+C_2^9\times 3!}{10^3}=0.271$

故選(3)。

二、多選題

8. (1)(4)(5)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量內積的應用

解析：(1)○：由正射影公式，$\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}}{|\overrightarrow{a}|^2}\right)\overrightarrow{a}=\left(\frac{5\times3+5\times1}{3^2+1^2}\right)\overrightarrow{a}=2\overrightarrow{a}$$

(2)╳：$\because \overrightarrow{a}\,/\!/\,2\overrightarrow{a}$

$\therefore \overrightarrow{b}$ 在 $2\overrightarrow{a}$ 上的正射影

$=\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影

$=2\overrightarrow{a}$

(3)╳：$\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{b}$ 上的正射影必平行 $\overrightarrow{b}$，

而 $\overrightarrow{a}\not\parallel\overrightarrow{b}$

(4)○：若 $\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影與 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{a}$ 上的正射影相等

則 $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}$，即 $-6+k=15+5$

解得 $k=26$

(5)○：若 $\overrightarrow{c}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 垂直，則 $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{a}=0$

即 $-6+k=0$

解得 $k=6$

故選(1)(4)(5)。

9. (2)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：資料解讀、數據分析

解析：(1)╳：依照級分對照表，15 級分的原始得分

$X>14\times6.03=84.42$，且 X 為整數

故原始得分只需 85 分(含)以上

(2)○：14 級分的原始得分為 $13\times6.03<X\leq14\times6.03$

$\Rightarrow 78.39<X\leq84.42$

且 X 為整數，故 $79\leq X\leq84$，最多差 5 分

(3)╳：頂標 11 級分表示成績位於第 88 百分位數之考生級分為 11 級分，但 11 級分的考生可能有很多，亦即 10 級分(含)以下的考生可能不到 87 %

〈補充〉110 學年度大考中心資料：10 級分(含)以下的考生共有 86.67 %

(4)○：$8\times6.03<50\leq9\times6.03$

故原始得分 50 分換算成級分數為 9 級分，達到前標

(5)○：$4\times6.03<30\leq5\times6.03$

故原始得分 30 分換算成級分數為 5 級分，未達均標。而均標(含)以上的人數至少有 50 %，故其級分數至少比 50 %的到考考生還低

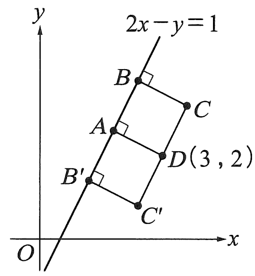
故選(2)(4)(5)。

10. (1)(3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：垂直直線的關係與點到直線的距離公式

解析：



$\because$ 直線 BC 與直線 AB 互相垂直

$\therefore$ 設直線 BC 的方程式為 $x+2y=k$

又 D 點到直線 AB 與到直線 BC 等距

$\therefore \dfrac{|2\cdot3-2-1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|3+2\cdot2-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

解得 $k=10$ 或 4

即直線 BC 的方程式為 $x+2y=10$ 或 $x+2y=4$

故選(1)(3)。

11. (1)(3)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形的特徵

解析：(1)○：因為 $f(x)=ax^3-12x^2+bx+c$ 的廣域特徵圖形近似 $y=-2x^3$，所以 $a=-2$

(2)╳：因為 $a=-2$，所以三次函數 $y=f(x)$ 的對稱中心在 $\left(\dfrac{12}{3a}, f\left(\dfrac{12}{3a}\right)\right)=(-2, f(-2))$

(3)○：因為 $y=f(x)$ 的對稱中心在 $(-2, f(-2))$

且在 $x=-2$ 附近的局部特徵圖形近似

$y=7x+17=7(x+2)+3$

所以 $y=f(x)=-2(x+2)^3+7(x+2)+3$

$=-2x^3-12x^2-17x+1$

$\Rightarrow b=-17$，$c=1$

(4)○：承(3)

(5)╳：$y=f(x)$ 只在 $x=-2$ 附近才近似 $y=7x+17$

實際上，$f(0.01)=-2(0.01)^3-12(0.01)^2-17(0.01)+1\approx0.83$

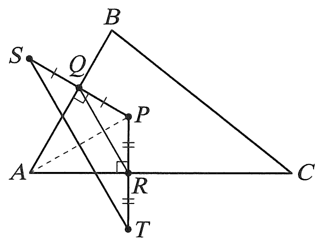
故選(1)(3)(4)。

12. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正、餘弦定理及三角形面積公式

解析：圖形如下



(1)○：$\cos A=\dfrac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\angle A=60^\circ$

$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)╳：$\triangle ABC$ 面積$=\frac{1}{2}\times5\times8\times\sin A=10\sqrt{3}$

〈另解〉亦可使用海龍公式

$\triangle ABC$ 面積為 $\sqrt{10\times5\times3\times2}=10\sqrt{3}$

(3)○：$\because \angle AQP=\angle ARP=90^\circ$

$\therefore \angle QPR=180^\circ-\angle A=120^\circ$

(4)○：$\triangle AQR$ 的外接圓即四邊形 $AQPR$ 的外接圓，直徑為 $\overline{AP}=2\sqrt{3}$

(5)╳：$\triangle AQR$ 中，$\frac{\overline{QR}}{\sin A}=2\sqrt{3}$ (正弦定理)

$\Rightarrow \overline{QR}=3$

又 Q，R 分別為 $\overline{PS}$ ，$\overline{PT}$ 之中點

$\Rightarrow \overline{ST}=2\overline{QR}=6$

故選(1)(3)(4)。

三、選填題

13. 720

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：完全相異物的直線排列

解析：Step 1：先排國文、英文、歷史與音樂有 4! 種方法

Step 2：將兩節數學與一節物理插入國文、英文、歷史與音樂形成的五個空隙有 $C_3^5\frac{3!}{2!1!}$ 種方法

因此，依據乘法原理，課程的安排方法有

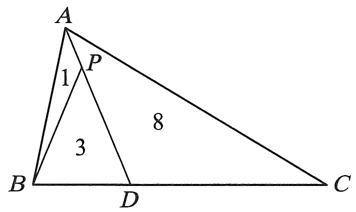
$4!\times C_3^5\frac{3!}{2!1!}=720$ (種)。

14. $\left(\frac{-5}{6}, \frac{1}{12}\right)$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量的線性組合

解析：



$a_{\triangle ABP}=12-(3+8)=1$

由$\triangle ABP$、$\triangle BDP$ 及$\triangle ACD$ 的面積知

$$\begin{cases}\overline{AP}:\overline{PD}=1:3\\ \overline{BD}:\overline{CD}=4:8=1:2\end{cases}$$

$$\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{-5}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$$

故實數數對 $(\alpha,\beta)=\left(\frac{-5}{6}, \frac{1}{12}\right)$。

15. 720

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：使用級數公式求總和

解析：立體模型前、後、上、下、左、右各面的面積皆為

$1+2+3+\cdots\cdots+15=\frac{15\times16}{2}=120$

故此立體模型的表面積為 $120\times6=720$ (平方公分)。

16. 10

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：過圓外一點求切線方程式

解析：配方後 C：$(x-3)^2+(y-2)^2=2$

因此，圓 C 之圓心為 $A(3,2)$，半徑為 $\sqrt{2}$

令過 $P(5,2)$ 圓 C 之切線為 L：$y-2=m(x-5)$

$\Rightarrow mx-y-5m+2=0$

因為直線 L 與圓 C 相切，所以

$d(A,L)=\frac{|-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4m^2=2(m^2+1)$

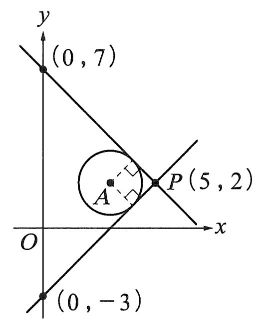
$\Rightarrow m=\pm1$

因此，過點 P 圓 C 之兩切線方程式為

$y-2=(x-5)$ 與 $y-2=-(x-5)$

即 $x-y=3$ 與 $x+y=7$

分別與 y 軸交於 $(0,-3)$ 與 $(0,7)$



故此圓在 y 軸上的陰影長度為 $7-(-3)=10$。

17. 90

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：遞迴數列與等差級數的應用

解析：令 $b_k=a_{2k-1}+a_{2k}$，其中 k 為正整數

$\because b_{k+1}-b_k=(a_{2k+1}+a_{2k+2})-(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=[(a_{2k}+3)+(a_{2k+1}-2)]-(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=[(a_{2k-1}-2)+(a_{2k}+3)+1]-(a_{2k-1}+a_{2k})$

$=2$

$\therefore \langle b_n\rangle$ 是公差等於 2 的等差數列，

且 $b_1=a_1+a_2=1+(-1)=0$

故 $S_{20}=b_1+b_2+b_3+\cdots\cdots+b_{10}$

$=\frac{10(2\times0+9\times2)}{2}$

$=90$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數的圖形解讀

解析：由最高點 B 點的 y 坐標得最大電壓為 300 伏特，

依題意得電壓「有效值」為

$\frac{300}{\sqrt{2}}=150\sqrt{2}\approx150\times1.414\approx212$

故選(1)。

19. $a=300$，$\omega=100\pi$，$\theta=\frac{\pi}{6}$，$T=\frac{1}{50}$ 秒，$F=50$ 赫茲

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數的平移與伸縮

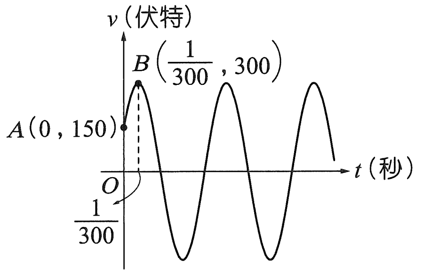
解析：(1)由函數 $V(t)$ 知最大值為 a，故 $a=300$。

(2)已知 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

由 A 點的 y 坐標為 B 點(波峰)之一半可知

A、B 兩點的 x 坐標差占一個週期的比例為

$$\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\frac{1}{6}$$



又 A、B 兩點的 x 坐標差為 $\frac{1}{300}$

週期 $T=\frac{1}{300}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{50}$ (秒)

故 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{50}\Rightarrow\omega=100\pi$。

(3)由(1)、(2)知 $V(t)=300\sin(100\pi\cdot t+\theta)$

$B\left(\frac{1}{300},300\right)$ 代入函數 $V(t)$ 得

$300=300\sin\left(100\pi\cdot\frac{1}{300}+\theta\right)$，且 $0\le\theta<2\pi$

故 $100\pi\cdot\frac{1}{300}+\theta=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$。

(4)承(2)，週期為 $\frac{1}{50}$ 秒

〈另解〉

亦可由(2)知 $\omega=100\pi$

表示函數 $V(t)$ 與函數 $f(t)=300\sin t$ 沿橫軸方向伸縮 $\frac{1}{100\pi}$ 倍之圖形週期相同

故函數 $V(t)$ 的週期 $T=2\pi\cdot\frac{1}{100\pi}=\frac{1}{50}$ (秒)。

(5)頻率 $F=\frac{1}{T}=50$ (赫茲)。

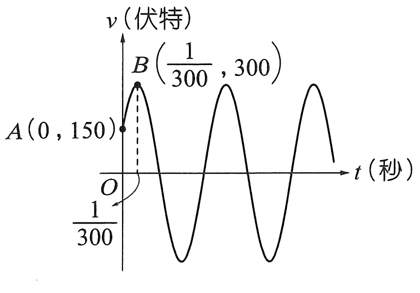
◎評分原則

(1)由函數 $V(t)$ 知最大值為 a，故 $a=300$。(2 分)

(2)已知 $\sin\frac{\pi}{2}=1$，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$

由 A 點的 y 坐標為 B 點(波峰)之一半可知

A、B 兩點的 x 坐標差占一個週期的比例為 $\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}}{2\pi}=\frac{1}{6}$



又 A、B 兩點的 x 坐標差為 $\frac{1}{300}$

週期 $T=\frac{1}{300}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{50}$ (秒)

故 $\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{50}\Rightarrow\omega=100\pi$。(2 分)

(3)由(1)、(2)知 $V(t)=300\sin(100\pi\cdot t+\theta)$

B 點代入函數 $V(t)$ 得 $300=300\sin\left(100\pi\cdot\frac{1}{300}+\theta\right)$，

且 $0\le\theta<2\pi$

故 $100\pi\cdot\frac{1}{300}+\theta=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$。(2 分)

(4)承(2)，週期為 $\frac{1}{50}$ 秒 (2 分)

〈另解〉

亦可由(2)知 $\omega=100\pi$

表示函數 $V(t)$ 與函數 $f(t)=300\sin t$ 沿橫軸方向伸縮 $\frac{1}{100\pi}$ 倍之圖形週期相同

故函數 $V(t)$ 的週期 $T=2\pi\cdot\frac{1}{100\pi}=\frac{1}{50}$ (秒)。(2 分)

(5)頻率 $F=\frac{1}{T}=50$ (赫茲)。(2 分)