數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(2)	(2)	(4)	(4)	(4)	(3)
8.	9.	10.	11.	12.	13.	
(2)(4)	(2)(4)	(1)(5)	(1)(2)(3)(4)	(3)(5)	(1)(5)	

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值的意涵

解析：$200-4\le x\le 200+12$

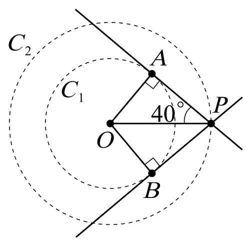
$\Rightarrow -8\le x-204\le 8 \Rightarrow |\,x-204\,|\le 8$，故選(5)。

2. (2)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的基本定義

解析：如下圖，



$\because$ 切線會與切點所在的半徑垂直

$\therefore \angle OAP=\angle OBP=90^\circ$

直角三角形 OAP 中，$\overline{OA}=\overline{OP}\cdot\sin\angle OPA$

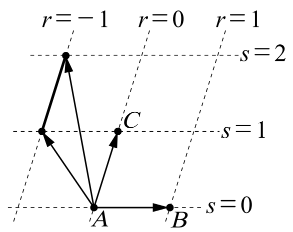
$\Rightarrow r_1=r_2\cdot\sin 40^\circ \Rightarrow r_2=\dfrac{r_1}{\sin 40^\circ}$，故選(2)。

3. (2)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：瞭解平面向量線性組合的意涵

解析：作圖如下，可得 P 點所形成的圖形為一線段



故選(2)。

4. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能計算各事件機率並依期望值定義求解

解析：由題目知，球號為質數的有 2，3，5，共 3 顆，非質數的有 2 顆

設 x_i 為取出的球數

x_i	1	2	3	4
p_i	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3\cdot 2}{5\cdot 4}$	$\dfrac{3\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3}$	$\dfrac{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}$
$x_i\,p_i$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{2}{5}$

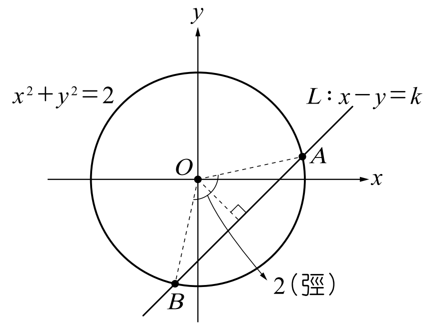
則期望值 $E=\dfrac{2+3+3+2}{5}=2$ (顆)，故選(4)。

5. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：瞭解二元一次不等式解區域並能利用圓心至直線距離求解

解析：由題意知，劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 所對圓心角為 2（弳），故 $k>0$，如下圖所示



則 $d(O\,,L)=\overline{OA}\cos 1$

$\Rightarrow \dfrac{k}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cos 1 \Rightarrow k=2\cos 1$

故選(4)。

6. (4)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：能理解題意並利用指、對數求近似值

解析：所求為 $\dfrac{2^{34}}{2^{8}}=2^{26}=(10^{\log 2})^{26}=10^{26\log 2}$

$\approx 10^{26\times 0.3010}=10^{7.826}=10^{0.826}\times 10^{7}\approx 7\times 10^{7}$

故選(4)。

7. (3)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能理解題意並以樹狀圖或乘法原理解題

解析：依題意，甲、乙兩人自 20：20 平分後，需一直 DEUCE 戰至 23：23 平分，再由甲連續得 2 分，以比分 25：23 獲勝此局。

每一次平分有 2 種可能：甲先得分或乙先得分，

因此答案為 $2^3=8$ 種。故選(3)。

〈另解〉亦可由樹狀圖解題

二、多選題

8. (2)(4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：能判斷數的大小關係

解析：(1) ╳：$(\sqrt{14}+\sqrt{10})^2=24+2\sqrt{140}$

$<24+2\sqrt{143}=(\sqrt{13}+\sqrt{11})^2$

$\therefore \sqrt{14}+\sqrt{10}<\sqrt{13}+\sqrt{11}$

(2) ○：$\dfrac{3\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{7}=\dfrac{45\sqrt{2}+60\sqrt{5}}{105}$

$=\dfrac{45\sqrt{2}+4\sqrt{5}+56\sqrt{5}}{105}$

$>\dfrac{49\sqrt{2}+56\sqrt{5}}{105}=\dfrac{7\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{15}$

(3) ╳：$0.\overline{6}=\dfrac{6}{9}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{\log 10^2}{\log 10^3}=\log_{1000}100$

(4) ○：由算幾不等式：$\dfrac{2^{10}+3^{10}}{2}>\sqrt{2^{10}\cdot 3^{10}}=6^5$

(5) ╳：$\sqrt{18-8\sqrt{2}}=\sqrt{18-2\sqrt{16\cdot 2}}=\sqrt{16}-\sqrt{2}$
$=4-\sqrt{2}=2+(2-\sqrt{2})$
其小數部分為 $2-\sqrt{2}$
故選(2)(4)。

9. (2)(4)
出處：第二冊〈數據分析〉
目標：瞭解最適(迴歸)直線公式
解析：(1) ╳：$\because m>1>0 \quad \therefore 0<r\leq 1$
(2) ○：$\because m=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，且 $m>1$，$0<r\leq 1$
$\therefore \dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}>1\Rightarrow \sigma_Y>\sigma_X$
(3) ╳：若 $k=0$，僅代表最適(迴歸)直線過原點，
但無法確定 μ_X，μ_Y 的值
例如：$(x_i , y_i)=(i , 2i)$，此時 $k=0$，$m=2$，
但 $\mu_X=\dfrac{21}{2}\neq 0$
(4) ○：新數據的最適(迴歸)直線為 $y'=rx'$，斜率為 r，
又 $r\leq 1<m$，故斜率會變小
(5) ╳：此 21 筆數據的平均數及標準差可能改變，
故相關係數不一定仍為 r
故選(2)(4)。

10. (1)(5)
出處：第一冊〈多項式函數〉
目標：熟悉三次多項式函數圖形特性
解析：$f(x)=x^3+3x^2+1=(x+1)^3-3x$
$=(x+1)^3-3(x+1)+3$
$\therefore a=-1$，$p=-3$，$k=3$
(1) ○：$ap=(-1)(-3)=3=k$
(2) ╳：對稱中心為 $(a , k)=(-1 , 3)$
(3) ╳：$y=f(x)$ 的圖形可以由 $y=x^3-3x$ 的圖形向左平移 1 單位再向上平移 3 單位得之
(4) ╳：$y=x^3-3x$ 與 x 軸有三個交點，
但 $y=x^3$ 與任一水平線皆只有一個交點，
故無法利用平移重合
(5) ○：$y=f(x)$ 的圖形在 $x=-1$ 附近的近似直線為
$y=-3(x+1)+3=-3x$
故選(1)(5)。

11. (1)(2)(3)(4)
出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈平面向量與應用〉
目標：瞭解並會使用正弦定理與平面向量基本運算
解析：(1) ○：由正弦定理可知：
外接圓半徑為 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\sin 60^\circ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{3}$
(2) ○：$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|$
$=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}$
$=\sqrt{3^2+3^2+2\cdot 3\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2}}=3\sqrt{3}$
(3) ○：承(2)，又 $\overrightarrow{AD}\,//\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，$|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{3}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$
(4) ○：$\triangle ABD$ 的面積為
$\dfrac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cdot\sin\angle BAD$
$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sin 30^\circ$
$=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}$
$=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$
(5) ╳：$\because \overline{AD}$ 為直徑
$\therefore \angle ABD=90^\circ$
即可得 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=|\overrightarrow{AB}|^2$
$=3^2=9$
〈另解〉
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=\overline{AD}\cdot\overline{AB}\cdot\cos\angle BAD$
$=2\sqrt{3}\cdot 3\cdot\cos 30^\circ$
$=9$
故選(1)(2)(3)(4)。

12. (3)(5)
出處：第二冊〈數據分析〉
目標：能判讀及計算一維數據的相關統計量
解析：(1) ╳：將每戶平均所得整理如下表，可知沒有逐年增加

年度	全國	大學以上	
	A	B	$B-A$
108	127.4	170.4	43.0
107	124.9	168.9	44.0
106	123.1	167.4	44.3
105	119.4	163.1	43.7
104	116.7	162.7	46.0

(2) ╳：設經濟戶長學歷低於大學者，在 108 年度每戶所得平均為 x 萬元
$873.5\times 127.4=(873.5-249.9)\,x+249.9\times 170.4$
$\Rightarrow 873.5(127.4-x)=249.9(170.4-x)$
$\Rightarrow x>100$
(3) ○：104～108 年間全國每戶平均所得的平均數約在 122 萬元，而每戶平均所得 116.7～127.4 萬元，與 122 萬元的平均離差平方和不到 5^2 萬元，故標準差小於 5 萬元
(4) ╳：將家庭戶數整理如下表，可知沒有逐年增加

年度	全國	低於 200 萬	
	C	D	$C-D$
108	873.5	855.6	17.9
107	864.3	848.6	15.7
106	855.9	839.1	16.8
105	845.8	832.4	13.4
104	838.6	827.9	10.7

⑸ ◯：全國每戶所得平均的年成長率為

$\dfrac{127.4-124.9}{124.9}=\dfrac{2.5}{124.9}$

經濟戶長學歷在大學及以上者之每戶所得平均的年成長率為 $\dfrac{170.4-168.9}{168.9}=\dfrac{1.5}{168.9}$

$\because 2.5>1.5$ 且 $124.9<168.9$ $\quad\therefore \dfrac{2.5}{124.9}>\dfrac{1.5}{168.9}$

故選⑶⑸。

13. ⑴⑸

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：能瞭解圓周運動的週期性現象及其對應的正弦函數性質

解析：⑴ ◯：$y(0)=135-120=15$

⑵ ╳：函數 $y(t)$ 的振幅為 $r=60$

⑶ ╳：函數 $y(t)$ 的週期為 30

⑷ ╳：$y(0)=-60+k=15\Rightarrow k=75$

⑸ ◯：週期為 $30\Rightarrow\dfrac{2\pi}{a}=30\quad\therefore a=\dfrac{\pi}{15}$

故選⑴⑸。

三、選填題

14. 0

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的圖形特性

解析：由 $f(1-t)=f(1+t)$，其中 t 為任意實數可知：

$f(x)$ 的對稱軸為 $x=1$

$\because f(x)$ 的首項係數為 3，故令 $f(x)=3(x-1)^2+k$

又 $f(x)$ 除以 $x-2$ 的餘式為 3，即 $f(2)=3$

$\therefore f(2)=3\cdot(2-1)^2+k=3\Rightarrow k=0$

可得 $f(x)=3(x-1)^2$，

因此滿足 $f(x)<0$ 的解為無解，故整數解為 0 個。

15. 86

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能分組討論並使用乘法原理及組合符號求解

解析：$3\le$ 學科能力測驗 $(X)+$ 分科測驗 $(Y)\le 5$

$\Rightarrow 3\le X+Y\le 5$，又 $X\le 4$，$1\le Y\le 3$

①當 $X+Y=3$，

$(X, Y)=(2, 1)$：$C^4_2C^3_1=6\cdot 3=18$

$(X, Y)=(1, 2)$：$C^4_1C^3_2=4\cdot 3=12$

$(X, Y)=(0, 3)$：$C^4_0C^3_3=1\cdot 1=1$

共 $18+12+1=31$ 種

②當 $X+Y=4$，

$(X, Y)=(3, 1)$：$C^4_3C^3_1=4\cdot 3=12$

$(X, Y)=(2, 2)$：$C^4_2C^3_2=6\cdot 3=18$

$(X, Y)=(1, 3)$：$C^4_1C^3_3=4\cdot 1=4$

共 $12+18+4=34$ 種

③當 $X+Y=5$，

$(X, Y)=(4, 1)$：$C^4_4C^3_1=1\cdot 3=3$

$(X, Y)=(3, 2)$：$C^4_3C^3_2=4\cdot 3=12$

$(X, Y)=(2, 3)$：$C^4_2C^3_3=6\cdot 1=6$

共 $3+12+6=21$ 種

由①、②、③得，共計 $31+34+21=86$ 種。

16. $\dfrac{1}{140}$

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能依限制條件處理機率問題

解析：$\dfrac{3!\times 2!}{\dfrac{9!}{3!\times 3!\times 3!}}=\dfrac{1}{140}$。

分子算法：

將三種內餡分別視為○、△、◇

第一行的擺放方式有 3! 種，剩下兩行有 2! 種擺放方式

○	◇	△
△	○	◇
◇	△	○

○	△	◇
△	◇	○
◇	○	△

17. (4 , 100)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能利用直線與圓的關係求解圓方程式

解析：$x^2+y^2-3hx-5hy+k=0$

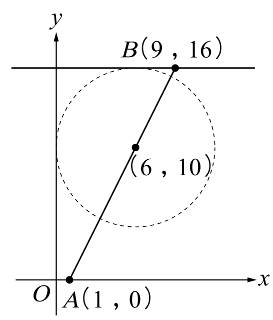
$\Rightarrow\left(x-\dfrac{3h}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5h}{2}\right)^2=-k+\dfrac{17}{2}h^2$

設 $A(1 , 0)$，$B(9 , 16)$

如下圖，圓心 $\left(\dfrac{3h}{2} , \dfrac{5h}{2}\right)$ 會過 $\overleftrightarrow{AB}$：$y=2x-2$

$\therefore\dfrac{5h}{2}=2\cdot\dfrac{3h}{2}-2\Rightarrow h=4$

故圓心為 (6 , 10)



又圓與直線 $y=16$ 相切，

因此半徑為 $16-10=6$

$\therefore -k+\dfrac{17}{2}h^2=-k+\dfrac{17}{2}\cdot 16=36$

$\Rightarrow k=17\cdot 8-36=100$

故數對 $(h , k)=(4 , 100)$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. ⑴

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能觀察圖形規律並計算級數和

解析：$a_5=1+3+3^2+3^3+3^4=121$

$b_5=3^5=243$

$\therefore b_5-a_5=122$

故選⑴。

19. 10

出處：第二冊〈數列與級數〉、

第三冊〈按比例成長模型〉

目標：能觀察圖形規律計算級數和並求解指數不等式

解析：設△ABC 的邊長為 1

在圖 n 中，黑色正六邊形的面積總和＋白色正三角形的面積總和＝△ABC 的面積

黑色正六邊形的面積總和大於△ABC 面積的 $\frac{49999}{50000}$ 倍

即白色正三角形的面積總和小於△ABC 面積的 $\frac{1}{50000}$ 倍

又圖 n 中有 3^n 個全等的白色正三角形，邊長為 $\frac{1}{3^n}$，

故白色正三角形的面積總和為

$$3^n\times\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{3^n}\right)^2\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3^n}$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3^n}<\frac{1}{50000}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n}<\frac{1}{50000}\Rightarrow 3^n>50000$$

$$\Rightarrow \log 3^n>\log 50000\Rightarrow n\log 3>4+\log 5$$

$$\Rightarrow n>\frac{4+\log 5}{\log 3}\approx\frac{4.6990}{0.4771}\approx 9.8$$

故 n 至少為 10。

〈另解〉

設△ABC 的邊長為 1

每一個黑色正六邊形的面積為其所在正三角形面積的 $\frac{2}{3}$ 倍，而剩下的白色正三角形面積總和占此正三角形面積的 $\frac{1}{3}$ 倍；

故圖 n 中黑色正六邊形的面積總和為

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\therefore \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}>\frac{49999}{50000}$$

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n>\frac{49999}{50000}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n}<\frac{1}{50000}\Rightarrow 3^n>50000$$

$$\Rightarrow \log 3^n>\log 50000$$

$$\Rightarrow n\log 3>4+\log 5$$

$$\Rightarrow n>\frac{4+\log 5}{\log 3}\approx\frac{4.6990}{0.4771}\approx 9.8$$

故 n 至少為 10。

◎評分原則

設△ABC 的邊長為 1

在圖 n 中，黑色正六邊形的面積總和＋白色正三角形的面積總和＝△ABC 的面積

黑色正六邊形的面積總和大於△ABC 面積的 $\frac{49999}{50000}$ 倍

即白色正三角形的面積總和小於△ABC 面積的 $\frac{1}{50000}$ 倍

又圖 n 中有 3^n 個全等的白色正三角形，邊長為 $\frac{1}{3^n}$，

故白色正三角形的面積總和為

$$3^n\times\left[\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(\frac{1}{3^n}\right)^2\right]=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3^n}\quad (2\text{ 分})$$

$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{3^n}<\frac{1}{50000}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 1^2\quad (2\text{ 分})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n}<\frac{1}{50000}\Rightarrow 3^n>50000\quad (1\text{ 分})$$

$$\Rightarrow \log 3^n>\log 50000\Rightarrow n\log 3>4+\log 5$$

$$\Rightarrow n>\frac{4+\log 5}{\log 3}\approx\frac{4.6990}{0.4771}\approx 9.8\quad (3\text{ 分})$$

故 n 至少為 10。　(2 分)

〈另解〉

設△ABC 的邊長為 1

每一個黑色正六邊形的面積為其所在正三角形面積的 $\frac{2}{3}$ 倍，而剩下的白色正三角形面積總和占此正三角形面積的 $\frac{1}{3}$ 倍；

故圖 n 中黑色正六邊形的面積總和為

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{3}\quad (2\text{ 分})$$

$$\therefore \frac{\frac{2}{3}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{1}{3}}>\frac{49999}{50000}\quad (2\text{ 分})$$

$$\Rightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^n>\frac{49999}{50000}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3^n}<\frac{1}{50000}\Rightarrow 3^n>50000\quad (1\text{ 分})$$

$$\Rightarrow \log 3^n>\log 50000$$

$$\Rightarrow n\log 3>4+\log 5$$

$$\Rightarrow n>\frac{4+\log 5}{\log 3}\approx\frac{4.6990}{0.4771}\approx 9.8\quad (3\text{ 分})$$

故 n 至少為 10。　(2 分)