

全國公立高中 110 學年度第三次學測能力模擬考[南一版]

第壹部分：選擇題(占 85 分)



一、單選題(占 30 分)

- 試問下列何者正確？
 - 若 a, b 為非負實數且 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 為有理數，則 \sqrt{a} 和 \sqrt{b} 都是有理數
 - 若 a, b 及 $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ 皆為有理數，則 $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ 為有理數
 - 若 a, b 是不相等的無理數，則 $ab + a - b$ 為無理數
 - 若 a, b 是有理數， c, d 是無理數，已知 $a + c = b + d$ ，則 $a = b$ 且 $c = d$
 - 若 a 為有理數且 $0 < a < 1$ ，則 a 為有限小數
- 設 x, y 為實數，若 $(x-2)^2 \leq 1$ ， $|y - \frac{7}{2}| \leq \frac{13}{2}$ ，且 $x^2 + y^2$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，求 $M + m$ 的值為何？ (1) 109 (2) 110 (3) 111 (4) 113 (5) 115
- 已知 a 為實數，多項式 $f(x)$ 滿足 $\frac{f(x)}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{a}{x-3} + 2$ ，且在 $x=2$ 時， $f(x)$ 有最小值 1，試求 $f(x)$ 除以 $x-1$ 之餘式為何？ (1) -2 (2) -3 (3) 2 (4) 3 (5) 4
- 有一個富翁想要從他的所有孩子中選出繼承家業的人，並對所有孩子說，發給每人 1 萬元作為創業基金去闖事業，告訴他們每個月結算時的資產必須比上個月資產的兩倍再多 1 萬元，也就是說，從現在算起，一個月後的資產至少要 3 萬元，二個月後至少要 7 萬元，……以此類推，如果能夠持續一年就有機會競選繼承人。請問從富翁發給孩子創業基金那日開始算，一年後至少要累積多少萬元才有資格競選繼承人？
(1) 4095 (2) 4096 (3) 8191 (4) 8192 (5) 16381
- 在坐標平面上有三點 $O(0,0)$ ， $A(4,3)$ ， $B(24,7)$ ，在平面上取一個 x 和 y 坐標均為正整數的 P 點，使得 $\angle POA = \angle POB$ ，則 P 點的坐標可能為何？
(1) (2,1) (2) (1,2) (3) (2,4) (4) (9,13) (5) (13,9)
- 潮汐是指海水受日月引力發生漲落的現象。在正常的狀況下，船在漲潮時駛進航道，靠近船塢，卸貨後落潮時返回海洋。已知某港口所在的地區每天發生兩次潮汐現象，下表(1)是此港口在某一天的時間(時)與水深(米)的關係表：

表(1)

時間(x)	水深(y 米)	時間(x)	水深(y 米)	時間(x)	水深(y 米)
0	10.0	9	7.0	18	10.0
3	13.0	12	10.0	21	7.0
6	10.0	15	13.0	24	10.0

則這個港口的水深與時間的函數關係，可用下列哪一個函數描述？

- $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 13$ (2) $y = 10 \log(x+10)$ (3) $y = 10 \sin(x + \frac{\pi}{6})$
- $y = 3 \sin(\frac{\pi}{6}x) + 10$ (5) $y = 3 \sin(\frac{\pi}{3}x) + 10$

二、多選題(占 25 分)

- 已知三次函數 $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 12$ ，試問下列敘述哪些是正確的？
 - $y = f(x)$ 的圖形對稱中心為 $(1, -7)$
 - $y = f(x)$ 的圖形和 x 軸交於相異三點
 - $y = f(x)$ 的圖形由左往右上升
 - 若點 (a, b) 在 $y = f(x)$ 的圖形上，則點 $(2-a, -14-b)$ 也在 $y = f(x)$ 的圖形上
 - $y = f(x)$ 在 $x=1$ 附近的圖形近似於直線 $y = 3x - 10$

8. 設 $C: x^2 + y^2 - 4x + ky + 5 = 0$ 之圖形為一圓，且點 $(k, k-3)$ 在圓 C 之外部，則實數 k 可為何值？ (1) -3 (2) -1 (3) $\frac{13}{6}$ (4) $\frac{5}{2}$ (5) 3
9. 若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，則下列敘述哪些是正確的？
 (1) $y = \log_a x$ 與 $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ 兩圖形對稱於 y 軸 (2) $y = a^x$ 與 $y = (\frac{1}{a})^x$ 兩圖形對稱於 x 軸
 (3) $y = a^x$ 與 $y = \log_a x$ 兩圖形對稱於直線 $y = x$ (4) $y = \log_a x$ 與 $y = \log_a(8x)$ 圖形相交於一點
 (5) 若 $y = a^x$ 的圖形和直線 $y = 7x$ 交於相異兩點，則 $y = \log_a x$ 的圖形和直線 $y = \frac{1}{7}x$ 也交於相異兩點
10. 調查全班 n 位同學的身高 X (公分)與數學成績 Y (分)，將其繪製成散布圖，並算出相關係數 r 與迴歸直線斜率 m 均為正數。若把身高的數據改為 X' (公尺)，並將 X' 與 Y 也給繪製成散布圖，且算出相關係數 r' 與迴歸直線斜率 m' 。試問下列哪些選項敘述是正確的？
 (1) $r = r'$ (2) $m < m'$
 (3) 對此資料可解讀為這個班的學生中，身高越高者，數學成績必然越高
 (4) 若所有點都在直線 $x - 2y + 20 = 0$ 上，則相關係數為 $\frac{1}{2}$
 (5) X 與 Y 的相關程度愈大，表示迴歸直線的斜率愈大
11. 設 \vec{a}, \vec{b} 為平面上兩個不平行的非零向量，若 $\vec{c} = \vec{a} - t\vec{b}, t \in \mathbb{R}$ ，則下列敘述哪些是正確的？ (1) \vec{c} 可能垂直 \vec{a} (2) \vec{c} 可能平行 \vec{a} (3) \vec{c} 可能垂直 \vec{b} (4) \vec{c} 可能平行 \vec{b}
 (5) 當 $|\vec{c}|$ 有最小值時， $t\vec{b}$ 恰為 \vec{a} 在 \vec{b} 上之正射影

三、選填題(占 30 分)

12. 設 $\langle a_n \rangle$ 與 $\langle b_n \rangle$ 都是等差數列，且 $a_1 = 1, a_2 = 2, b_3 = \frac{1}{2}$ 。已知對所有的正整數 n ， $\frac{a_n}{b_n}$ 皆為常數 p 。求 $\langle b_n^2 \rangle$ 首 5 項的和為_____。
13. 2019 新型冠狀病毒(COVID-19)目前已知主要的傳染方式為近距離飛沫、接觸(直接或間接)傳染。醫用口罩的主要功用是阻擋使用者的飛沫傳給他人，亦能以外層 PP 防潑水材質，阻隔他人的飛沫傳到使用者的口和鼻。已知一奈米為 10^{-9} 米，若某種變異 2019 新型冠狀病毒(COVID-19)的直徑為 x 米，且 $\log x = -7.1549$ ，試求此病毒的直徑約為_____奈米。
14. 新冠病毒肆虐全球， T 國採購 A 、 B 兩個品牌的疫苗，並將全國人民按照年齡與職業分成若干類別，全部類別數的 $\frac{5}{6}$ 施打 A 牌疫苗，有 11 個類別施打 B 牌疫苗，全部類別數的 $\frac{1}{2}$ 兩個品牌疫苗都有施打，而且只有『18 歲以下』這一類別兩種疫苗都沒施打。推知 T 國將民眾分為_____種類別。

15. 停車場內共有 12 個空的停車位排成一列，今有 9 輛車抵達，並隨機挑選一個位置停車。不久後又有一台需要兩個停車位大小的休旅車進入停車場，試問此休旅車能夠完全停入停車格的機率=_____。(化成最簡分數)

16. 在 $\triangle ABC$ 中，已知兩個邊長 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=3$ ，若 $\angle A$ 有最大值為 θ ，則 $\sin \theta =$ _____。(化成最簡分數)

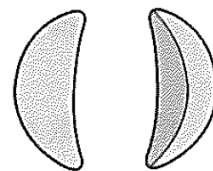
17. 已知 $\vec{a} = (3, -1)$ 在 \vec{b} 上的正射影為 $(2, 1)$ ，若將 $2\vec{a}$ 分解為 \vec{u} 和 \vec{v} 兩個向量和，其中 \vec{u} 與 \vec{b} 平行且 \vec{v} 與 \vec{b} 垂直，則 $\vec{v} =$ _____。

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

每年過年期間阿嬤都會親自到紫南宮向土地公、土地婆焚香祈福求發財金，期望一整年能夠好連發財。如圖(1)，求發財金的方式是透過「擲筊」：拿兩個相同且有正反兩面的筊杯往地上丟擲，出現一個正面一個反面的情形稱為『聖筊』。若第一次擲筊就獲得『聖筊』者，可求金 600 元；若第一次未獲『聖筊』，可再次向土地公、土地婆行體許願後擲筊，如在第二次獲『聖筊』者，可求金 500 元。如此規則，若一開始連續沒有擲得『聖筊』，但依次在第三次、第四次、第五次、第六次才初獲『聖筊』者，可求金 400 元、300 元、200 元、100 元。倘若連續六次皆未獲『聖筊』者，則請下次再來祈福許願求金。假設每個筊杯出現正反面的機率一樣，試回答下列的問題。

18. 阿嬤年求到 300 元的機率是_____。(選填題，3 分)



圖(1)

19. 假設求到發財金 $100 \times k$ 元的機率為 P_k 其中 $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，試選出正確的選項。

(單選題，3 分)

- (1) $P_1 + P_3 + P_5 = P_2 + P_4 + P_6$ (2) $P_1 + P_2 = 2P_3$
 (3) $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$ (4) $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ 是等比數列
 (5) 阿嬤求到發財金的期望值為 $\frac{100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600}{6}$ 元

20. 阿嬤求發財金時擲筊次數的期望值為幾次？(非選擇題，9 分)

RB303 全國公私立高中 110 學年度第三次學測能力模擬考[南一版]

參考答案

選擇題：1. (2) 2. (2) 3. (4) 4. (3) 5. (1) 6. (4) 7. (1)(3)(4)(5) 8. (1)(4)(5) 9. (3)(5)
10. (1)(2) 11. (1)(2)(3)(5)

選填題：12. $\frac{55}{36}$ 13. 70 14. 18 15. $\frac{5}{11}$ 16. $\frac{3}{4}$ 17. (2, -4)

混合題：18. $\frac{1}{16}$ 19. (4) 20. $\frac{63}{32}$