

# 全國公立高中 110 學年度第三次學測能力模擬考[南一版]

第壹部分：選擇題(占 85 分)



## 一、單選題(占 30 分)

- 試問下列何者正確？
  - 若  $a, b$  為非負實數且  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  為有理數，則  $\sqrt{a}$  和  $\sqrt{b}$  都是有理數
  - 若  $a, b$  及  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  皆為有理數，則  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  為有理數
  - 若  $a, b$  是不相等的無理數，則  $ab + a - b$  為無理數
  - 若  $a, b$  是有理數， $c, d$  是無理數，已知  $a + c = b + d$ ，則  $a = b$  且  $c = d$
  - 若  $a$  為有理數且  $0 < a < 1$ ，則  $a$  為有限小數
- 設  $x, y$  為實數，若  $(x-2)^2 \leq 1$ ， $|y - \frac{7}{2}| \leq \frac{13}{2}$ ，且  $x^2 + y^2$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，求  $M + m$  的值為何？ (1) 109 (2) 110 (3) 111 (4) 113 (5) 115
- 已知  $a$  為實數，多項式  $f(x)$  滿足  $\frac{f(x)}{(x-3)^2} = \frac{3}{(x-3)^2} + \frac{a}{x-3} + 2$ ，且在  $x=2$  時， $f(x)$  有最小值 1，試求  $f(x)$  除以  $x-1$  之餘式為何？ (1) -2 (2) -3 (3) 2 (4) 3 (5) 4
- 有一個富翁想要從他的所有孩子中選出繼承家業的人，並對所有孩子說，發給每人 1 萬元作為創業基金去闖事業，告訴他們每個月結算時的資產必須比上個月資產的兩倍再多 1 萬元，也就是說，從現在算起，一個月後的資產至少要 3 萬元，二個月後至少要 7 萬元，……以此類推，如果能夠持續一年就有機會競選繼承人。請問從富翁發給孩子創業基金那日開始算，一年後至少要累積多少萬元才有資格競選繼承人？  
(1) 4095 (2) 4096 (3) 8191 (4) 8192 (5) 16381
- 在坐標平面上有三點  $O(0,0)$ ， $A(4,3)$ ， $B(24,7)$ ，在平面上取一個  $x$  和  $y$  坐標均為正整數的  $P$  點，使得  $\angle POA = \angle POB$ ，則  $P$  點的坐標可能為何？  
(1) (2,1) (2) (1,2) (3) (2,4) (4) (9,13) (5) (13,9)
- 潮汐是指海水受日月引力發生漲落的現象。在正常的狀況下，船在漲潮時駛進航道，靠近船塢，卸貨後落潮時返回海洋。已知某港口所在的地區每天發生兩次潮汐現象，下表(1)是此港口在某一天的時間(時)與水深(米)的關係表：

表(1)

時間( $x$ )	水深( $y$ 米)	時間( $x$ )	水深( $y$ 米)	時間( $x$ )	水深( $y$ 米)
0	10.0	9	7.0	18	10.0
3	13.0	12	10.0	21	7.0
6	10.0	15	13.0	24	10.0

則這個港口的水深與時間的函數關係，可用下列哪一個函數描述？

- $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 + 13$  (2)  $y = 10 \log(x+10)$  (3)  $y = 10 \sin(x + \frac{\pi}{6})$
- $y = 3 \sin(\frac{\pi}{6}x) + 10$  (5)  $y = 3 \sin(\frac{\pi}{3}x) + 10$

## 二、多選題(占 25 分)

- 已知三次函數  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 9x - 12$ ，試問下列敘述哪些是正確的？
  - $y = f(x)$  的圖形對稱中心為  $(1, -7)$
  - $y = f(x)$  的圖形和  $x$  軸交於相異三點
  - $y = f(x)$  的圖形由左往右上升
  - 若點  $(a, b)$  在  $y = f(x)$  的圖形上，則點  $(2-a, -14-b)$  也在  $y = f(x)$  的圖形上
  - $y = f(x)$  在  $x=1$  附近的圖形近似於直線  $y = 3x - 10$

8. 設  $C: x^2 + y^2 - 4x + ky + 5 = 0$  之圖形為一圓，且點  $(k, k-3)$  在圓  $C$  之外部，則實數  $k$  可為何值？ (1)  $-3$  (2)  $-1$  (3)  $\frac{13}{6}$  (4)  $\frac{5}{2}$  (5)  $3$
9. 若  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，則下列敘述哪些是正確的？  
 (1)  $y = \log_a x$  與  $y = \log_{\frac{1}{a}} x$  兩圖形對稱於  $y$  軸 (2)  $y = a^x$  與  $y = (\frac{1}{a})^x$  兩圖形對稱於  $x$  軸  
 (3)  $y = a^x$  與  $y = \log_a x$  兩圖形對稱於直線  $y = x$  (4)  $y = \log_a x$  與  $y = \log_a(8x)$  圖形相交於一點  
 (5) 若  $y = a^x$  的圖形和直線  $y = 7x$  交於相異兩點，則  $y = \log_a x$  的圖形和直線  $y = \frac{1}{7}x$  也交於相異兩點
10. 調查全班  $n$  位同學的身高  $X$ (公分)與數學成績  $Y$ (分)，將其繪製成散布圖，並算出相關係數  $r$  與迴歸直線斜率  $m$  均為正數。若把身高的數據改為  $X'$ (公尺)，並將  $X'$  與  $Y$  也給繪製成散布圖，且算出相關係數  $r'$  與迴歸直線斜率  $m'$ 。試問下列哪些選項敘述是正確的？  
 (1)  $r = r'$  (2)  $m < m'$   
 (3) 對此資料可解讀為這個班的學生中，身高越高者，數學成績必然越高  
 (4) 若所有點都在直線  $x - 2y + 20 = 0$  上，則相關係數為  $\frac{1}{2}$   
 (5)  $X$  與  $Y$  的相關程度愈大，表示迴歸直線的斜率愈大
11. 設  $\vec{a}, \vec{b}$  為平面上兩個不平行的非零向量，若  $\vec{c} = \vec{a} - t\vec{b}, t \in \mathbb{R}$ ，則下列敘述哪些是正確的？ (1)  $\vec{c}$  可能垂直  $\vec{a}$  (2)  $\vec{c}$  可能平行  $\vec{a}$  (3)  $\vec{c}$  可能垂直  $\vec{b}$  (4)  $\vec{c}$  可能平行  $\vec{b}$   
 (5) 當  $|\vec{c}|$  有最小值時， $t\vec{b}$  恰為  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上之正射影

### 三、選填題(占 30 分)

12. 設  $\langle a_n \rangle$  與  $\langle b_n \rangle$  都是等差數列，且  $a_1 = 1, a_2 = 2, b_3 = \frac{1}{2}$ 。已知對所有的正整數  $n$ ， $\frac{a_n}{b_n}$  皆為常數  $p$ 。求  $\langle b_n^2 \rangle$  首 5 項的和為\_\_\_\_\_。
13. 2019 新型冠狀病毒(COVID-19)目前已知主要的傳染方式為近距離飛沫、接觸(直接或間接)傳染。醫用口罩的主要功用是阻擋使用者的飛沫傳給他人，亦能以外層 PP 防潑水材質，阻隔他人的飛沫傳到使用者的口和鼻。已知一奈米為  $10^{-9}$  米，若某種變異 2019 新型冠狀病毒(COVID-19)的直徑為  $x$  米，且  $\log x = -7.1549$ ，試求此病毒的直徑約為\_\_\_\_\_奈米。
14. 新冠病毒肆虐全球， $T$  國採購  $A$ 、 $B$  兩個品牌的疫苗，並將全國人民按照年齡與職業分成若干類別，全部類別數的  $\frac{5}{6}$  施打  $A$  牌疫苗，有 11 個類別施打  $B$  牌疫苗，全部類別數的  $\frac{1}{2}$  兩個品牌疫苗都有施打，而且只有『18 歲以下』這一類別兩種疫苗都沒施打。推知  $T$  國將民眾分為\_\_\_\_\_種類別。

15. 停車場內共有 12 個空的停車位排成一列，今有 9 輛車抵達，並隨機挑選一個位置停車。不久後又有一台需要兩個停車位大小的休旅車進入停車場，試問此休旅車能夠完全停入停車格的機率=\_\_\_\_\_。(化成最簡分數)

16. 在  $\triangle ABC$  中，已知兩個邊長  $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BC}=3$ ，若  $\angle A$  有最大值為  $\theta$ ，則  $\sin \theta =$ \_\_\_\_\_。(化成最簡分數)

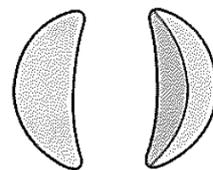
17. 已知  $\vec{a} = (3, -1)$  在  $\vec{b}$  上的正射影為  $(2, 1)$ ，若將  $2\vec{a}$  分解為  $\vec{u}$  和  $\vec{v}$  兩個向量和，其中  $\vec{u}$  與  $\vec{b}$  平行且  $\vec{v}$  與  $\vec{b}$  垂直，則  $\vec{v} =$ \_\_\_\_\_。

**第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)**

**18-20 題為題組**

每年過年期間阿嬤都會親自到紫南宮向土地公、土地婆焚香祈福求發財金，期望一整年能夠好連發財。如圖(1)，求發財金的方式是透過「擲筊」：拿兩個相同且有正反兩面的筊杯往地上丟擲，出現一個正面一個反面的情形稱為『聖筊』。若第一次擲筊就獲得『聖筊』者，可求金 600 元；若第一次未獲『聖筊』，可再次向土地公、土地婆行體許願後擲筊，如在第二次獲『聖筊』者，可求金 500 元。如此規則，若一開始連續沒有擲得『聖筊』，但依次在第三次、第四次、第五次、第六次才初獲『聖筊』者，可求金 400 元、300 元、200 元、100 元。倘若連續六次皆未獲『聖筊』者，則請下次再來祈福許願求金。假設每個筊杯出現正反面的機率一樣，試回答下列的問題。

18. 阿嬤年求到 300 元的機率是\_\_\_\_\_。(選填題，3 分)



圖(1)

19. 假設求到發財金  $100 \times k$  元的機率為  $P_k$  其中  $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，試選出正確的選項。

(單選題，3 分)

- (1)  $P_1 + P_3 + P_5 = P_2 + P_4 + P_6$       (2)  $P_1 + P_2 = 2P_3$
- (3)  $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$       (4)  $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$  是等比數列
- (5) 阿嬤求到發財金的期望值為  $\frac{100 + 200 + 300 + 400 + 500 + 600}{6}$  元

20. 阿嬤求發財金時擲筊次數的期望值為幾次？(非選擇題，9 分)

**RB303 全國公私立高中 110 學年度第三次學測能力模擬考[南一版]**

**參考答案**

**選擇題：**1. (2) 2. (2) 3. (4) 4. (3) 5. (1) 6. (4) 7. (1)(3)(4)(5) 8. (1)(4)(5) 9. (3)(5)  
10. (1)(2) 11. (1)(2)(3)(5)

**選填題：**12.  $\frac{55}{36}$  13. 70 14. 18 15.  $\frac{5}{11}$  16.  $\frac{3}{4}$  17. (2, -4)

**混合題：**18.  $\frac{1}{16}$  19. (4) 20.  $\frac{63}{32}$