

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	12-3	12-4
2	2	4	3	1	4	1345	145	35	12	1235	5	5	3	6
13-1	13-2	14-1	14-2	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	17-1	17-2	17-3	18-1	18-2	18-3
7	0	1	8	5	1	1	3	4	2	-	4	1	1	6
19	20													
4														

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

- (1) 反例： $a=(3+\sqrt{2})^2, b=(3-\sqrt{2})^2$ ，  
則  $\sqrt{a}+\sqrt{b}=(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})$  為有理數。  
(2)  $\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\in\mathcal{Q}$ 。  
(3)  $ab+a-b=(a-1)(b+1)+1$ 。  
反例：取  $a=\sqrt{2}+1, b=\sqrt{2}-1$ ，  
則  $ab+a-b=\sqrt{2}\times\sqrt{2}+1=3\in\mathcal{Q}$ 。  
(4) 反例： $2+(\sqrt{2}-1)=3+(\sqrt{2}-2)$ 。  
(5) 反例： $a=0.\bar{2}=\frac{2}{9}$ 。  
故選(2)。
- $(x-2)^2\leq 1\Rightarrow 1\leq x\leq 3; |y-\frac{7}{2}|\leq\frac{13}{2}\Rightarrow -3\leq y\leq 10$ ，  
因此  $1\leq x^2\leq 9, 0\leq y^2\leq 100$ ，故  $1\leq x^2+y^2\leq 109$ ，  
可得  $M+m=109+1=110$ ，故選(2)。
- $f(x)=2(x-3)^2+a(x-3)+3$ ，  
又  $f(2)=2-a+3=1\Rightarrow a=4$   
 $\Rightarrow f(x)=2(x-3)^2+4(x-3)+3$ ，  
故  $f(x)$  除以  $x-1$  之餘式為  
 $f(1)=2\times(1-3)^2+4(1-3)+3=3$ ，  
故選(4)。
- 設數列  $\langle a_n \rangle$  代表  $n$  個月後結算的資產，  
所以  $a_1=3$  且遞迴關係式  $a_{n+1}=2a_n+1$   
 $a_{n+1}+k=2(a_n+k)\Rightarrow a_{n+1}=2a_n+k\Rightarrow k=1$ ，  
所以原遞迴關係式可改為  $(a_{n+1}+1)=2(a_n+1)$ 。  
令  $b_n=a_n+1\Rightarrow b_{n+1}=2b_n$ ，  
即  $\langle b_n \rangle$  為等比數列且公比為 2，首項  $b_1=a_1+1=3+1=4$   
 $\Rightarrow b_n=b_1\times 2^{n-1}=4\times 2^{n-1}=2^{n+1}$ ，  
故  $a_n=b_n-1=2^{n+1}-1\Rightarrow a_{12}=2^{13}-1=8191$ ，  
故選(3)。
- $\begin{cases} \overline{OA}: 3x-4y=0 \\ \overline{OB}: 7x-24y=0 \end{cases}$  的角平分線也是  $\overline{OA}, \overline{OB}$  過  $O$  點之法線  
 $\begin{cases} 4x+3y=0 \\ 24x+7y=0 \end{cases}$  的角平分線，  
因為角平分線上任意點到兩直線的距離相等，  
 $\frac{|4x+3y|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{|24x+7y|}{\sqrt{24^2+7^2}}$ ，因為  $P$  點的  $x$  和  $y$  坐標均為正整數，  
所以  $\frac{4x+3y}{5}=\frac{24x+7y}{25}\Rightarrow x=2y$ ，  
符合關係式的整數，故選(1)。
- ① 因為  $x=0, 6, 12, 18, 24$  時， $y=10$ ，  
所以(1)(2)均不可能。  
②  $(0, 10)$  代入選項(3)錯誤，而選項(5)亦不通過  $(3, 13)$ ，  
都不符合選項條件。  
選項(4)通過表中所有數據，  
故選(4)。

二、多選題

- 若  $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ ，則對稱中心為  $(h, k)$ 。  
(1)  $\circ$ ： $h=\frac{-(-6)}{3\times 2}=1$ ，由綜合除法可得  
 $f(x)=2(x-1)^3+3(x-1)-7$ ，  
故對稱中心為  $(1, -7)$ 。  
$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & -6 & +9 & -12 & \\ & +2 & -4 & +5 & 1 \\ \hline 2 & -4 & +5 & -7 & \\ & +2 & -2 & 1 & \\ \hline 2 & -2 & +3 & & \\ & +2 & 1 & & \\ \hline 2 & +0 & & & \end{array}$$
  
(2)  $\times$ ：設  $f(x)=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ ，  
若  $a\times p>0$  且  $a>0$ ，  
則函數略圖如右，  
故  $y=f(x)$  之圖形和  $x$  軸  
恰有一個交點。  
(3)  $\circ$ ：由右圖可知，  
 $y=f(x)$  的圖形由左往右上升。  
(4)  $\circ$ ： $y=f(x)$  的圖形對稱中心為  $(1, -7)$ ，  
而  $(a, b)$  關於  $(1, -7)$  的對稱點為  
 $(2-a, -14-b)$  亦在  $y=f(x)$  的圖形上。  
(5)  $\circ$ ：由一次近似的性質可知， $y=f(x)$  在  $x=1$  附近的圖形  
近似於直線  $y=3(x-1)-7=3x-10$ 。  
故選(1)(3)(4)(5)。
- ①  $C: x^2+y^2-4x+ky+5=0$   
 $\Rightarrow C: (x-2)^2+(y+\frac{k}{2})^2=\frac{k^2}{4}-1$  表一圓，  
故  $\frac{k^2}{4}-1>0\Rightarrow k>2$  或  $k<-2$ 。  
② 點  $(k, k-3)$  在圓  $C$  外部，  
故  $k^2+(k-3)^2-4k+k(k-3)+5>0$ ，  
整理得  $3k^2-13k+14>0\Rightarrow (3k-7)(k-2)>0$ ，  
故  $k>\frac{7}{3}$  或  $k<2$ 。  
由①②知， $k>\frac{7}{3}$  或  $k<-2$ 。  
故選(1)(4)(5)。
- (1)  $\times$ ： $y=\log_a x$  與  $y=\log_{\frac{1}{a}} x$  兩圖形對稱於  $x$  軸。  
(2)  $\times$ ： $y=a^x$  與  $y=(\frac{1}{a})^x$  兩圖形對稱於  $y$  軸。  
(3)  $\circ$ ：依指數函數與對數函數的對稱性可知。  
(4)  $\times$ ： $y=\log_a(8x)=\log_a 8+\log_a x$  為  $y=\log_a x$  的圖形  
向上平移  $\log_a 8$  單位，故兩個圖形不相交。  
(5)  $\circ$ ： $y=a^x$  和  $y=\log_a x$  的圖形對稱直線  $y=x$ ，  
且直線  $y=7x$  和直線  $y=\frac{1}{7}x$  也對稱於直線  $y=x$ 。

則若  $y = a^x$  的圖形和直線  $y = 7x$  交於相異兩點，  
則  $y = \log_a x$  的圖形和直線  $y = \frac{1}{7}x$  也交於相異兩點。

故選(3)(5)。

10. (1) ○ (2) ○ :

設  $X' = \frac{X}{100}$ ，則  $\mu_{X'} = \frac{\mu_X}{100} = \frac{1}{100}\mu_X$  且

$\sigma_{X'} = \frac{1}{100}\sigma_X$ ，所以

$$r_{X',Y} = \frac{(X'_1 - \mu_{X'})(Y_1 - \mu_Y) + \dots + (X'_n - \mu_{X'})(Y_n - \mu_Y)}{\sqrt{(X'_1 - \mu_{X'})^2 + \dots + (X'_n - \mu_{X'})^2} \sqrt{(Y_1 - \mu_Y)^2 + \dots + (Y_n - \mu_Y)^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{X_1}{100} - \frac{1}{100}\mu_X\right)(Y_1 - \mu_Y) + \dots + \left(\frac{X_n}{100} - \frac{1}{100}\mu_X\right)(Y_n - \mu_Y)}{\sqrt{\left(\frac{X_1}{100} - \frac{1}{100}\mu_X\right)^2 + \dots + \left(\frac{X_n}{100} - \frac{1}{100}\mu_X\right)^2} \sqrt{(Y_1 - \mu_Y)^2 + \dots + (Y_n - \mu_Y)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{100}[(X_1 - \mu_X)(Y_1 - \mu_Y) + \dots + (X_n - \mu_X)(Y_n - \mu_Y)]}{\frac{1}{100}\sqrt{(X_1 - \mu_X)^2 + \dots + (X_n - \mu_X)^2} \sqrt{(Y_1 - \mu_Y)^2 + \dots + (Y_n - \mu_Y)^2}}$$

$$= \frac{(X_1 - \mu_X)(Y_1 - \mu_Y) + \dots + (X_n - \mu_X)(Y_n - \mu_Y)}{\sqrt{(X_1 - \mu_X)^2 + \dots + (X_n - \mu_X)^2} \sqrt{(Y_1 - \mu_Y)^2 + \dots + (Y_n - \mu_Y)^2}}$$

$$= r_{X,Y}$$

$X', Y$  迴歸直線的斜率

$$m' = r' \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_{X'}} = r \times \frac{\sigma_Y}{\frac{1}{100}\sigma_X} = 100(r \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}) = 100m。$$

- (3) × : 相關係數的解讀，沒有必然關係。  
 (4) × : 只要所有點都在斜率為正的直線上，  
 相關係數即為 1。  
 (5) × : 迴歸直線的斜率公式  $m = r \times \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$ ，  
 因為  $\sigma_X, \sigma_Y$  不確定，  
 所以斜率與相關係數並非成正比。

故選(1)(2)。

11. (1) ○ : 當  $\vec{c} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 - t\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  時，若存在  $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$

且  $t = \frac{|\vec{a}|^2}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$ ，則  $\vec{c}$  垂直  $\vec{a}$ 。

(2) ○ : 當  $t=0$  時， $\vec{c} = \vec{a}$ ，則  $\vec{c} \parallel \vec{a}$ 。

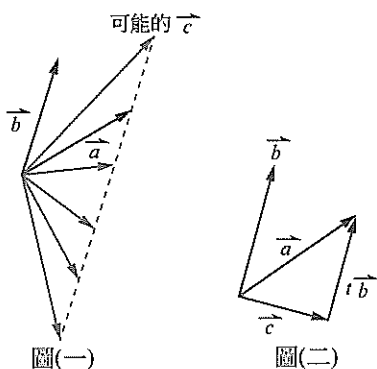
(3) ○ : 當  $\vec{c} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - t|\vec{a}|^2 = 0$  時，

$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2}$ ， $\vec{c}$  垂直  $\vec{b}$ 。

(4) × : 如圖(一)所示，因為  $\vec{a}$  不為零向量，  
 故  $\vec{c}$  不可能平行  $\vec{b}$ 。

(5) ○ : 如圖(二)所示， $|\vec{c}|$  有最小值時， $\vec{c}$  垂直  $\vec{b}$ ，  
 $t\vec{b}$  恰為  $\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上之正射影。

故選(1)(2)(3)(5)。



### 三、選填題

12. 由題設條件知， $\{a_n\}$  的公差  $= 2 - 1 = 1$

$$\Rightarrow a_3 = 3, \text{ 所以 } p = \frac{a_3}{b_3} = 6。$$

因為  $\frac{a_n}{b_n} = 6$ ，所以  $(b_n)^2 = \frac{1}{36}(a_n)^2$ ，

$$\text{故 } b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = \frac{1}{36} \times (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2)$$

$$= \frac{1}{36}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2)$$

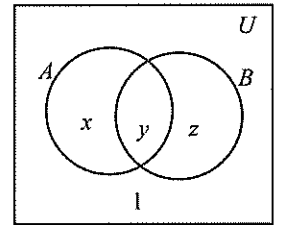
$$= \frac{1}{36} \times \frac{5 \times (5+1)(2 \times 5+1)}{6} = \frac{55}{36}。$$

13.  $\log x = -7.1549 = -8 + 0.8451 = \log 10^{-8} + \log 7 = \log(7 \times 10^{-8})$ ，  
 故  $x \approx 7 \times 10^{-8} = 70 \times 10^{-9}$ ，

故此病毒的直徑約為 70 奈米。

14. 設全國共有  $n$  個類別，由文氏圖可知：

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z + 1 = n \\ x + y = \frac{5}{6}n \\ y + z = 11 \\ y = \frac{1}{2}n \end{cases}$$



$$\Rightarrow x = \frac{5}{6}n - y = \frac{1}{3}n，$$

代入  $x + y + z + 1 = n$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}n + 11 + 1 = n \Rightarrow n = 18。$$

15. 若前 9 輛車停完後，所留下來的空位並無兩個相鄰，則此休  
 旅車無法找到適當的停車位  
 而前 9 輛車停完後還剩 3 個停車位，此 3 個空位會介於 9 輛  
 停好車的 10 個空隙中

$$\text{則剩下的 3 個停車位彼此不相鄰的機率為 } \frac{C_3^{10}}{C_3^{12}} = \frac{6}{11}$$

$$\text{此休旅車能夠找到適當停車位的機率為 } 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}。$$

16. 因為  $\overline{BC}$  不為最大邊，所以  $\angle A$  為銳角，

$$\text{由正弦定理知 } \frac{4}{\sin C} = \frac{3}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{4} \sin C \leq \frac{3}{4}，$$

當  $\sin C = 1$  時， $\angle A$  有最大值為  $\theta$ ，此時  $\sin \theta = \frac{3}{4}$ 。

17. 由題意可知， $2\vec{a} = (6, -2) = \vec{u} + \vec{v}$ ，

因為  $\vec{u} \parallel \vec{b}$ ，所以  $\vec{u}$  是  $2\vec{a}$  在  $\vec{b}$  上的正射影

$$\Rightarrow \vec{u} = 2(2, 1) = (4, 2)，$$

$$\text{故 } \vec{v} = 2\vec{a} - \vec{u} = (6, -2) - (4, 2) = (2, -4)。$$

### 第貳部分、混合題或非選擇題

18. 由於筊杯出現正反面的機率一樣，

所以擲筊一次得『聖筊』的機率是  $\frac{1}{2}$ 。

根據規則，前三次都不是『聖筊』，第四次是『聖筊』，

可求到發財金 300 元，所以機率為  $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ 。

19. 設獎金  $x$  元的機率為  $P(x)$ ，由題意得知，

$x$	600	500	400	300	200	100	0
$P(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{1}{2^6}$	$\frac{1}{2^6}$

(1) × :  $P_6 + P_4 + P_2 = P(600) + P(400) + P(200)$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{21}{32}，$$

$$P_5 + P_3 + P_1 = P(500) + P(300) + P(100)$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} = \frac{21}{64},$$

所以  $P_1 + P_3 + P_5 \neq P_2 + P_4 + P_6$ 。

(2) ×：由上表可知， $P_1 + P_2 \neq 2P_3$ 。

(3) ×：全事件還包含沒有求到發財金的事件。

(4) ○：由上表可知，正確。

(5) ×：六種金額的機率相等時，發財金  $x$  的期望值才是  $x$  值的算術平均數，所以真正的期望值為

$$\frac{1}{2} \times 600 + \frac{1}{2^2} \times 500 + \frac{1}{2^3} \times 400 + \frac{1}{2^4} \times 300 + \frac{1}{2^5} \times 200$$

$$+ \frac{1}{2^6} \times 100。$$

故選(4)。

20. 共擲  $i$  次的機率為  $P_i$ ，則

$i$	1	2	3	4	5	6
$P_i$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^5}$	$\frac{2}{2^6}$

(6分，算出每個  $P_i$  值各得1分)

$$\text{所以 } E = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{8} + 4 \times \frac{1}{16} + 5 \times \frac{1}{32} + 6 \times \frac{2}{64}$$

$$= \frac{16 + 16 + 12 + 8 + 5 + 6}{32} = \frac{63}{32} (\text{次}) \cdot (3 \text{分})$$