全國公私立高級中學 111 學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學 B 考科解析

考試日期：111 年 10 月 26～27 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
2	4	2	4	1	3	45	35	2345	1235	23	35	1	7	1
14-2	14-3	15-1	15-2	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2	18	19-1	19-2	20		
4	4	4	8	1	6	6	2	0	4	3	4			

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (Ⅰ) $\begin{cases} x-2\geq 0 \\ x-2\geq -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 2 \\ x\geq \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x\geq 2$。

(Ⅱ) $\begin{cases} x-2<0 \\ -(x-2)\geq -2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x\geq -2 \end{cases} \Rightarrow -2\leq x<2$。

所以由(Ⅰ)(Ⅱ)聯集得 $x\geq -2$，

故選(2)。

2. 將 $(a,3),(1,b),(4,c)$ 代入 $y=\log(x+1)$，

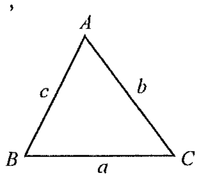
$\Rightarrow \begin{cases} 3=\log(a+1) \\ b=\log 2 \\ c=\log 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=10^3-1 \\ b=\log 2 \\ c=\log 5 \end{cases}$

$\Rightarrow a+b+c=(10^3-1)+\log 2+\log 5$
$=10^3-1+\log 10$
$=10^3-1+1$
$=10^3$，

所以 $\log(a+b+c)=\log 10^3=3$。

故選(4)。

3. 設 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長分別為 a,b,c，



由正弦定理知

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

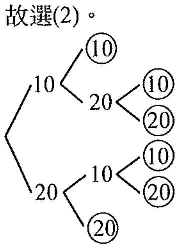
$=\dfrac{1}{3}:\dfrac{1}{4}:\dfrac{1}{6}=4:3:2$，

所以再由餘弦定理知

$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{4^2+2^2-3^2}{2\times4\times2}=\dfrac{11}{16}$，

又 $\cos\dfrac{\pi}{3}<\cos B=\dfrac{11}{16}<\cos\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow\dfrac{\pi}{4}<\angle B<\dfrac{\pi}{3}$，

故選(2)。

4. 

$\Rightarrow$

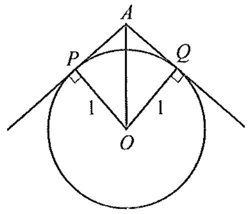
獎金	10＋10	10＋20＋10	10＋20＋20	20＋10＋10	20＋10＋20	20＋20
機率	$\dfrac{1}{2^2}$	$\dfrac{1}{2^3}$	$\dfrac{1}{2^3}$	$\dfrac{1}{2^3}$	$\dfrac{1}{2^3}$	$\dfrac{1}{2^2}$

$\Rightarrow E=20\times\dfrac{1}{4}+40\times\dfrac{1}{8}+50\times\dfrac{1}{8}+40\times\dfrac{1}{8}+50\times\dfrac{1}{8}+40\times\dfrac{1}{4}$

$=37.5$（元），

故選(4)。

5. 正五邊形的內角 $\angle A=108^\circ$，



$\Rightarrow \angle OAQ=54^\circ$，$\angle AOQ=36^\circ$，

所以在 $\triangle OAQ$ 中 $\Rightarrow \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{OQ}}=\tan 36^\circ$

$\Rightarrow \overline{AQ}=\overline{OQ}\times\tan 36^\circ=\tan 36^\circ$，

故所求 $=5\left(2\times\tan 36^\circ-2\pi\times\dfrac{72}{360}\right)$

$=10\times\tan 36^\circ-2\pi$，

故選(1)。

6. 設每過一天 A,B 的累積染疫人數分別以 r_A,r_B 的倍率成長，n 日後 A 病毒的累積染疫人數就會超過 B 病毒的累積染疫人數，且 $r_A{}^2=2$，$r_B{}^3=2$

$\Rightarrow \log r_A=\dfrac{1}{2}\log 2$，$\log r_B=\dfrac{1}{3}\log 2$，

因 $r_A{}^n>10\,r_B{}^n$，所以 $\left(\dfrac{r_A}{r_B}\right)^n>10$

$\Rightarrow n\log\dfrac{r_A}{r_B}>1\Rightarrow n(\log r_A-\log r_B)>1$

$\Rightarrow n\left(\dfrac{1}{2}\log 2-\dfrac{1}{3}\log 2\right)>1\Rightarrow n>\dfrac{6}{\log 2}\approx 19.93$，故 n 取 20，

故選(3)。

二、多選題

7. $2x-1<3<5x+8\Rightarrow\begin{cases} 2x-1<3 \\ 3<5x+8 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x<2 \\ x>-1 \end{cases}\Rightarrow -1<x<2$。

(1) ×：$|2x-1|<1\Rightarrow -1<2x-1<1\Rightarrow 0<x<1$。

(2) ×：$x^2>x+2\Rightarrow(x-2)(x+1)>0\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$。

(3) ×：$(x+1)^2(x^3-8)<0\Rightarrow(x+1)^2(x-2)(x^2+2x+4)<0$
$\Rightarrow x<2$ 但 $x\neq -1$。

(4) ○：$\dfrac{1}{4}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<2\Rightarrow\left(\dfrac{1}{2}\right)^2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\Rightarrow -1<x<2$。

(5) ○：$\log_3(x+1)<1\Rightarrow\log_3(x+1)<\log_3 3\Rightarrow x<2$。
又因 $x+1>0\Rightarrow x>-1$，故 $-1<x<2$。

故選(4)(5)。

8. 設 $f(x)=a(x-1)^3+2(x-1)+5$，其中 a 為正。

(1) ×：$y=f(x)$ 圖形的中心點為 $(1,5)$。

(2) ×：$f(3-\sqrt{2})+f(-1+\sqrt{2})$
$=a(2-\sqrt{2})^3+2(2-\sqrt{2})+5+a(-2+\sqrt{2})^3+2(-2+\sqrt{2})+5$
$=10$。

(3) ○：$y=f(x)$ 圖形在 $x=1$ 處的一次近似為
$y=2(x-1)+5$。

(4) ×：因 $y=a(x-1)^3+2(x-1)+5$ 經平移後可得
$y=ax^3+2x$，又因 a 為正
$\Rightarrow y=ax^3+2x=x(ax^2+2)$ 圖形為嚴格遞增型，
所以 $y=f(x)$ 圖形為嚴格遞增型。
$\Rightarrow$方程式 $f(x)=0$ 恰有一個實根。

(5) ○：因 $a(x-1)^3+2x+3=3x+2$，
所以 $a(x-1)^3-(x-1)=0$，
因 a 為正 $\Rightarrow$ 恰有三個相異實根。

故選(3)(5)。

9. (1) ×：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 垂直 $\Rightarrow(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{b}=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{b}=0\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+1^2=0\Rightarrow\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=-1$。

(2) ○：$|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|=\sqrt{3}\Rightarrow|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|^2=3$

$\Rightarrow|\overrightarrow{a}|^2+2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2=3$

$\Rightarrow|\overrightarrow{a}|^2+2\times(-1)+1^2=3$

$\Rightarrow|\overrightarrow{a}|^2=4\Rightarrow|\overrightarrow{a}|=2$。

(3) ○：設 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 夾角為 θ

$\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}=\dfrac{-1}{2\times1}\Rightarrow\theta=120^\circ$。

(4) ○：$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|^2=(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})$

$=|\overrightarrow{a}|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+|\overrightarrow{b}|^2$

$=2^2-2\times(-1)+1^2=7$

$\Rightarrow|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|=\sqrt{7}$。

(5) ○：設 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}$ 夾角為 ϕ

$\Rightarrow\cos\phi=\dfrac{(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b})}{|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}||\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}|}=\dfrac{|\overrightarrow{a}|^2-|\overrightarrow{b}|^2}{\sqrt{3}\times\sqrt{7}}$

$=\dfrac{2^2-1^2}{\sqrt{21}}=\dfrac{3}{\sqrt{21}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$。

故選(2)(3)(4)(5)。

10. (1) ○：$x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+\cdots+x_{10}{}^2$

$=10(\mu_x{}^2+\sigma_x{}^2)=10(7^2+\sigma_x{}^2)>490$。

(2) ○：y 對 x 的迴歸直線恆過點 $(\mu_x,\mu_y)=(7,4)$，

又過點 $(2,1)\Rightarrow m=\dfrac{4-1}{7-2}=\dfrac{3}{5}$。

所以 y 對 x 的迴歸直線方程式為 $y-4=\dfrac{3}{5}(x-7)$，

即為 $y=\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{5}$。

(3) ○：由(2)知 y 對 x 的迴歸直線斜率 $m=\dfrac{3}{5}$，又 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$\Rightarrow\dfrac{3}{5}=(0.3)\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=2\Rightarrow\sigma_y=2\sigma_x$。

(4) ×：$r_{uv}=-r_{xy}=-0.3$。

(5) ○：v 對 u 的迴歸直線斜率為

$r_{uv}\times\dfrac{\sigma_v}{\sigma_u}=(-0.3)\times\dfrac{2\sigma_y}{\sigma_x}=(-0.3)\times4=-\dfrac{6}{5}$。

故選(1)(2)(3)(5)。

11. (1) ×：$L_1 /\!/ L_2\Rightarrow\sin\theta=2$ 不可能，

故 L_1 與 L_2 不可能平行。

(2) ○：$L_1\perp L_2\Rightarrow\sin\theta\times2=-1\Rightarrow\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$ 有可能，

故 L_1 與 L_2 可能垂直。

(3) ○：因為 L_1 與 L_2 的斜率不可能相等，

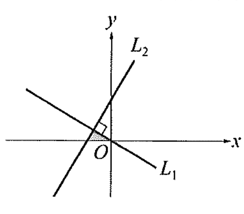
所以 L_1 與 L_2 必恰交於一點。

(4) ×：因為 L_1 與 L_2 皆與 x 軸不垂直，

所以若△為直角△ $\Rightarrow L_1\perp L_2\Rightarrow\sin\theta=-\dfrac{1}{2}$，

此時△的兩股長必不相等，

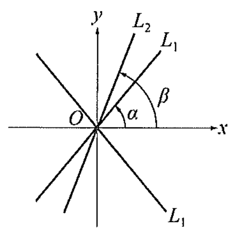
故△不可能為等腰直角△。



(5) ×：因為 $-1\le\sin\theta\le1\Rightarrow L_1$ 與 x 軸最大銳夾角 $\alpha=45^\circ$，

L_2 的斜率為 $2\Rightarrow L_2$ 與 x 軸的銳夾角 $\beta>60^\circ$，

所以 L_1 與 L_2 的銳夾角大於 15°。



故選(2)(3)。

12. 因 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 之中垂線分別為

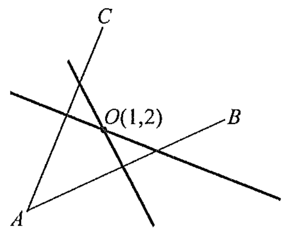
$y-2=-2(x-1)$ 與

$y-2=-\dfrac{1}{3}(x-1)$，

即 $2x+y=4$，$x+3y=7$，

又因點 P 滿足

$\overline{AP}>\overline{BP}$ 且 $\overline{AP}>\overline{CP}$，



所以點 $P(x,y)$ 滿足 $\begin{cases}2x+y>4\\x+3y>7\end{cases}$。

(1) ×：$2+3\times1\not>7$。

(2) ×：$2\times(-1)+3\not>4$。

(3) ○：$\begin{cases}2\times\sqrt{101}+(-1)>4\\\sqrt{101}+3\times(-1)>7\end{cases}$。

(4) ×：$2\times\sqrt{2}+1\not>4$。

(5) ○：$\begin{cases}2\times(-\dfrac{1}{2})+6>4\\(-\dfrac{1}{2})+3\times6>7\end{cases}$。

故選(3)(5)。

三、選填題

13. $3a_5+a_7=4a_6\Rightarrow3a_1\times r^4+a_1\times r^6=4a_1r^5$

$\Rightarrow r^2-4r+3=0\Rightarrow r=3$（因為 $r>1$），

又 $a_i\times a_j=(a_7)^2\Rightarrow a_1r^{i-1}\times a_1r^{j-1}=(a_1r^6)^2$

$\Rightarrow i+j=7\times2=14$，

所以 $r+i+j=3+14=17$。

14. 先排 $aacde\begin{cases}aa\text{ 相鄰}\\a,a\text{ 不相鄰}\end{cases}$

(Ⅰ) aa 相鄰 $\boxed{aa}\,c\underset{b}{\wedge}d\underset{b}{\wedge}e\underset{b}{\wedge}\Rightarrow4!\times3=72$。

(Ⅱ) aa 不相鄰 $\vee c\vee d\vee e\vee\Rightarrow3!\times C_2^4$，

$\boxed{a}\,c\,\boxed{a}\,d\underset{b}{\wedge}e\underset{b}{\wedge}\Rightarrow3!\times C_2^4\times2=72$。

故所求 $=72+72=144$。

15. <法一>

(Ⅰ) 若三天升旗的同學皆不同，

則有 $3!\times2=12$ 種不同的排法。

(Ⅱ) 若三天升旗中恰兩天同學相同，

則有 $C_2^3C_1^3C_1^2\times2=36$ 種不同的排法。

所以共有 $12+36=48$ 種不同的排法。

<法二>

三天任意排列(甲,乙),(乙,丙),(甲,丙)

$3!\times2\times2\times2=48$。

可選升旗或降旗

16. 設取到依序成等比三數為$(3)^{a_p}$、$(3)^{a_q}$、$(3)^{a_r}$
$\Rightarrow 3^{a_p}\times 3^{a_r}=(3^{a_q})^2$
$\Rightarrow a_p+a_r=2a_q$
$\Rightarrow a_p$、a_q、a_r成等差
自a_1、a_2、a_3、……、a_{100}取出三數成等差的
機率$=\dfrac{98+96+94+\cdots\cdots+2}{C_3^{100}}=\dfrac{\frac{100\times 49}{2}}{\frac{100\times 99\times 98}{6}}=\dfrac{1}{66}$。

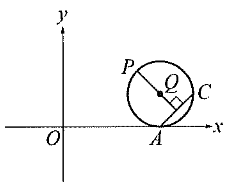
17. 因$\overline{AO}$平分$\angle BAC$
$\Rightarrow \overline{BO}:\overline{OC}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:25$，
所以設$\overline{BO}=4t$，$\overline{OC}=25t$，其中$t>0$，
因$\angle BOA+\angle AOC=180^\circ \Rightarrow \cos\angle BOA+\cos\angle AOC=0$
$\Rightarrow \dfrac{16t^2+36-16}{2\times 4t\times 6}+\dfrac{625t^2+36-625}{2\times 25t\times 6}=0$
$\Rightarrow 25(16t^2+36-16)+4(625t^2+36-625)=0$
$\Rightarrow 2900t^2=1856 \Rightarrow t^2=\dfrac{16}{25} \Rightarrow t=\dfrac{4}{5}$
$\Rightarrow \overline{OC}=20$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. $3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=3(x,y)-(3,0)-(2,2)-(4,1)$
$=(3x-9,3y-3)$
$\Rightarrow |3\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}|=\sqrt{(3x-9)^2+(3y-3)^2}=3$
$\Rightarrow (x-3)^2+(y-1)^2=1$，
所以P點的軌跡圖形為一圓，
故選(4)。

19. 當$\overleftrightarrow{OP}$斜率最大時，直線OP與圓相切。
設切線$\overleftrightarrow{OP}$：$y=mx$，即$mx-y=0$，
已知圓心$Q(3,1)\Rightarrow d(Q,\overleftrightarrow{OP})=\dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=1$，
$\Rightarrow m=\dfrac{3}{4}$（0不合），
所以直線OP斜率最大值為$\dfrac{3}{4}$。

20. 設圓$(x-3)^2+(y-1)^2=1$的圓心為$Q(3,1)$，
半徑$r=1$，（2分）
$d(P,\overleftrightarrow{AC})=h$
$\Rightarrow \triangle PAC$面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AC}\times h$，



又$\overleftrightarrow{AC}$：$x-y-3=0$
$\Rightarrow d(P,\overleftrightarrow{AC})$的最大值為
$r+d(Q,\overleftrightarrow{AC})=1+\dfrac{|3-1-3|}{\sqrt{2}}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，（2分）
所以$\triangle PAC$面積的最大值為
$\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}\times(1+\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$。（3分）