

新竹區高中 111 學年度學測模擬考(數 B)試題(111-E3)

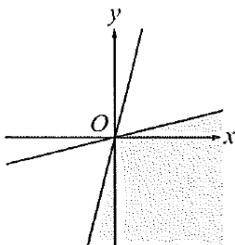
第壹部分：選擇(填)題(占 85 分)



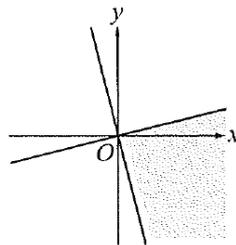
一、單選題(占 35 分)

- 試問有多少組整數數對 (a, b) 滿足 $|3a + 2b - 2| + |b + 3| = 1$?
 (1) 0 組 (2) 1 組 (3) 2 組 (4) 3 組 (5) 4 組
- 令 $a = 2^{160}, b = 3^{100}, c = 5^{70}$ ，請選出正確的大小關係。
 (1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$ (4) $b > c > a$ (5) $c > a > b$
- 直角坐標平面上，以原點 O 為極點， x 軸的正向為極軸，建立極坐標系。今若點 A 的極坐標為 $A[36, \theta]$ ，其中廣義角 θ 為第二象限角且 $\sin \theta = \frac{1}{4}$ ，則直線 OA 的斜率為下列哪一個選項？
 (1) 3 (2) $-\sqrt{3}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{15}}$ (4) $-\frac{1}{\sqrt{15}}$ (5) $-\frac{1}{3}$
- 已知兩實數 a, b ，若 $A(1, a), B(3, b)$ 兩點對直線 $y = x$ 的對稱點分別為 A', B' ，且 A', B' 均在對數函數 $y = \log_2 x$ 的圖形上。試問下列何者是梯形 $ABB'A'$ 的高？
 (1) 5 (2) $5\sqrt{2}$ (3) 4 (4) $4\sqrt{2}$ (5) 3
- 設一組數據自小而大為 x_1, x_2, \dots, x_{111} 。已知這組數據的算術平均數為 28，標準差為 10。若這組數據的 $x_{32}, x_{36}, x_{40}, x_{44}$ 其標準化數值依序為 $-0.9, -0.7, -0.5, -0.3$ ，則下列哪一個選項中的數值最接近原數據 x_1, x_2, \dots, x_{111} 的第 30 百分位數？
 (1) 21 (2) 22 (3) 23 (4) 24 (5) 25
- 讀外文系的小鎧為了訓練記憶單字的能力，今天(第 1 天)先背 20 個英文單字，且之後的每天要比前一天多背某固定數量個英文單字，目標是第 50 天可背完一本 7000 個英文單字的單字書。如果小鎧沒有違背承諾的話，則小鎧最少從第幾天開始，每天要背超過 199 個英文單字？
 (1) 第 35 天 (2) 第 37 天 (3) 第 39 天 (4) 第 41 天 (5) 第 43 天
- 實數 $a > 0, b < 0$ ，則二元一次聯立不等式 $\begin{cases} ax + by \geq 0 \\ bx - ay \leq 0 \end{cases}$ 的所有解可能為下列哪個選項所示的區域？

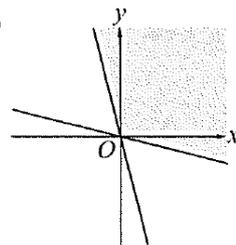
(1)



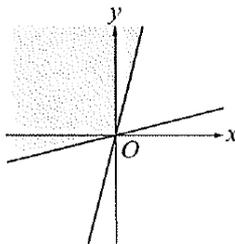
(2)



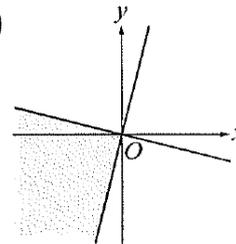
(3)



(4)



(5)



二、多選題(占 25 分)

- 設 a 為實數，函數 $f(x) = ax^2 + 4ax + a^2$ 的最小值為 k ，試問下列哪些 a 值能使得 $f(x)$ 為二次函數且滿足 $-3 \leq k \leq 5$?
 (1) $a = -1$ (2) $a = 0$ (3) $a = 1$ (4) $a = 2$ (5) $a = 3$
- 將三次函數 $y = f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 27x - 23$ 的圖形平移，使其對稱中心平移至點 $(-1, 1)$ 。設平移後得到的三次函數為 $y = g(x) = 2x^3 + bx^2 + cx + d$ ，試問下列哪些選項正確？
 (1) $b + c + d = 21$ (2) $y = g(x)$ 的圖形和 x 軸只有一個交點

- (3) $y = g(x)$ 在 $x = -1$ 附近的一次近似為 $y = 3x + 4$
 (4) 「 $y = g(x)$ 在 $x = -1$ 附近的一次近似圖形」平行「 $y = f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的一次近似圖形」
 (5) 「 $y = g(x)$ 在 $x = -1$ 附近的一次近似圖形」和「 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 附近的一次近似圖形」相交於一點

10. 設某一個以 $K(3,1)$ 為圓心的圓和直線 L 相切於 $A(7,6)$ ，請問下列哪些選項的敘述是正確的？
 (1) 直線 AK 和此圓相交於 $A(7,6)$ 及 $B(1,4)$ (2) L 的斜率為 $-\frac{4}{5}$ (3) 若

$\vec{AP} = (10, -8)$ ，則 P 在 L 上 (4) 若 P 在 L 上且 $P \neq A$ ，則 $|\vec{KA} - 2022\vec{AP}| > |\vec{KA} + 111\vec{AP}|$

(5) 若點 P, Q 在 L 上且 $\overline{PQ} = 6$ ，又點 C 在此圓上，則 $\triangle PQC$ 面積的最大值為 $3\sqrt{41}$

11. 如圖(一)，用三個邊長為 1 且有三邊重疊的正六邊形來組成一個凹多邊形，把這個凹多邊形當作基本元件，將它適當地平移到一些不同的位置，像玩拼圖那樣子互相拼接(沒有縫隙且不重疊)，就可以得到某些凹多邊形圖案，圖(二)為其中一個例子(此兩圖中的 $O, P, Q, R, A, B, C, D, E$ 皆為正六邊形的某些頂點)。

請問下列哪些選項的敘述正確？

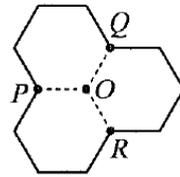
(1) $\vec{OP} + \vec{OQ} + \vec{OR} = \vec{0}$

(2) $\vec{AD} = 2\vec{OP} - 2\vec{OR}$

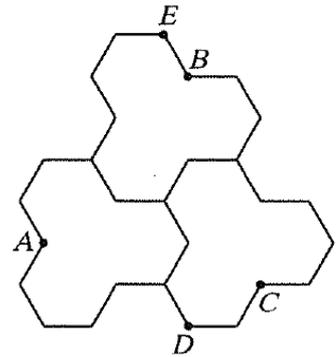
(3) $\vec{AD} \cdot \vec{AE} = 0$

(4) $\triangle ABC$ 為正三角形

(5) 可以把圖(一)的凹多邊形適當地平移到一些不同的位置而互相拼接(沒有縫隙且不重疊)出一個凹 2022 邊形



圖(一)



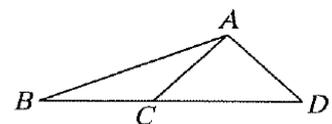
圖(二)

12. 某手搖飲連鎖店熱烈推出甲、乙兩款招牌飲料，並在七夕情人節時調查這兩款飲料的銷售情形。志明分別以 X 杯、 Y 杯表示甲、乙兩款飲料的銷售量，並統計旗下某 10 個店面的銷售量，得到 X, Y 的 10 組數據為 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ 。志明先算出 X, Y 的算術平均數分別為 123、76，而 X, Y 的標準差分別為 42、28。接著，他畫出如右所示之散布圖(其中 X 軸、 Y 軸的單位長度相等)，並根據此圖得到 X, Y 的相關係數為 0.98。可是後來檢查，懊惱地發現，急著趕赴情人節約會的他，竟把 Y 的 10 個數據的順序弄顛倒！右圖中的 10 個點，由左而右，其實是 $(x_1, y_{10}), (x_2, y_9), \dots, (x_{10}, y_1)$ ，於是相關係數也被迫要重新計算才行；除此之外他沒有犯其他錯誤。根據上述，請問下列哪些選項的敘述正確？
 (1) X, Y 負相關 (2) Y 對 X 的最適直線通過點 $(123, 76)$
 (3) $Y=1056$ 時，可估計 $X = -1377$
 (4) $(x_1 - 99)^2 + (x_2 - 99)^2 + \dots + (x_{10} - 99)^2 > (x_1 - 123)^2 + (x_2 - 123)^2 + \dots + (x_{10} - 123)^2$
 (5) 若已知此連鎖店的某一家店面在七夕情人節共賣出 134 杯甲飲料，則可估算這家店面當天的甲、乙兩款飲料的總銷售量不超過 210 杯

三、選填題(占 25 分)

13. 設某圓以 $K(-2,3)$ 為圓心且被直線 $2x + y - 9 = 0$ 截出一條長度為 10 的弦，則這個圓的外切正方形面積為_____。

14. 如右圖， C 在 \overline{BD} 上， $\cos B = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ， $\overline{AB} = 6, \overline{AC} = \overline{AD} = 3$ ，則 $\triangle ACD$ 的外接圓半徑為_____。(化為最簡分數)



15. 媽媽買車輪餅給 4 個小孩，不過老闆準備要收攤了，只剩 3 個奶油口味、3 個紅豆口味和 2 個芋頭口味。礙於媽媽不想讓小孩吃太多車輪餅，所以打算從剩下的口味中任選 4 個，分給每個孩子一人 1 個，則媽媽有_____種分配方法。
16. 有一箱子，箱中有 2 顆白球與 2 顆紅球。有一遊戲，從箱中一次取一球，取後不放回，持續取球至 2 顆紅球皆被取出時停止遊戲。假設每次取球時，還在箱中的每一顆球被取出的機會皆相同。若第 k 次取球時取出紅球，就可獲得金額 $(4-k) \times 100$ 元，將兩次取到紅球時所獲得的金額加總即為參加遊戲的獎金。試問參加遊戲的獎金期望值為_____元。
17. 某銀行推出青年成家方案，針對首購族群提供年利率 1.32% 的房屋貸款利率，按月複利計息，且利率升降方式配合中央銀行升降息調整。某日金龍利用該方案向該銀行貸款 1000 萬元，每月還款相同金額，分 20 年還清。但在尚未還款時中央銀行突然宣布年利率升息 0.24% (即年利率變為 1.56%)。若金龍不想延長貸款年限，請幫金龍計算升息後每月還款金額增加_____萬元。(四捨五入至小數點後第二位)

第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

根據聲學理論，物體的振動會引起介質有週期性的振動，使周圍的空氣產生疏密變化，進而形成聲音。當介質某處的振動量 y 隨時間 x 呈現週期性變化時，我們稱此週期函數為聲波函數。

在聲波函數中，「頻率」為「週期」的倒數，例如：若聲波函數的週期為 $\frac{1}{440}$ 秒，則每 1 秒鐘恰含 440 個週期，於是頻率為 440Hz (赫茲)。另外，已知聲音每提高 1 個 8 度 (例如，從一個 Do 音提高到下一個較高的 Do 音)，頻率就恰好增加為 2 倍。

18. 設聲波函數 $f(x) = 5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 4$ 的最大值為 M ，最小值為 m ，請問下列哪些選項的敘述正確？ (多選題，5 分) (1) $M = f\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (2) 若 $f(x_0) = m$ ，則 $x_0 = \frac{7\pi}{12}$
 (3) $\frac{M+m}{2} = 4$ (4) $f(x)$ 的振幅為 10 (5) $f(x)$ 的週期是函數 $g(x) = \sin x$ 週期的 2 倍
19. 明朝的學者朱載堉研創了「十二平均律」，他在相差 1 個 8 度的兩個聲音之間插入另外 11 個聲音，使這 13 個聲音的頻率形成等比數列。現在假設，由低而高，有 13 個聲音的頻率形成等比數列且最高音比最低音提高 1 個 8 度，又設第 1 個聲音 (即最低音) 的聲波函數為 $y = \sin(ax)$ ，而第 10 個聲音的聲波函數為 $y = \sin(bx)$ ，其中的常數 $a, b > 0$ 。
 試求 $\log_2 \frac{b}{a}$ 之值。(非選擇題，5 分)
20. 根據報導，美國的太空總署 (NASA) 從觀測的數據分析出英仙座的黑洞發出一種約比鋼琴的中央 C 音低了 57 個 8 度的聲音。今設甲聲音及乙聲音的聲波函數分別為 $y = 440 \sin(cx + 1000)$ 及 $y = 4.40 \times 10^3 \sin(dx + 1000)$ ，其中的常數 $c, d > 0$ 。若甲聲音比乙聲音提高 57 個 8 度，則 $\frac{c}{d}$ 的整數部分是幾位數？ (非選擇題，5 分)

RB306 新竹區高中 111 學年度學測模擬考(數 B)試題(111-E3)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (5) 3. (4) 4. (4) 5. (1) 6. (2) 7. (2) 8. (3)(5) 9. (1)(2)(3)(4)(5)
10. (2)(3)(4) 11. (1)(3)(4) 12. (1)(2)(4)(5)

選填題：13. 180 14. $\frac{9}{4}$ 15. 70 16. 300 17. 0.11

混合題：18. (1)(3) 19. $\frac{3}{4}$ 20. 18