數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(5)	(4)	(4)	(1)	(2)	(2)
8.	9.	10.	11.	12.		
(3)(5)	(1)(2)(3)(4)(5)	(2)(3)(4)	(1)(3)(4)	(1)(2)(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：能夠計算絕對值方程式

解析：因為 $|3a+2b-2|\ge 0$ 且 $|b+3|\ge 0$

所以 $\begin{cases}|3a+2b-2|=0\\|b+3|=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|3a+2b-2|=1\\|b+3|=0\end{cases}$

① $\begin{cases}|3a+2b-2|=0\\|b+3|=1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}3a+2b-2=0\\b+3=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3a+2b-2=0\\b+3=-1\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{10}{3}\ (\text{不合})\\b=-4\end{cases}$

② $\begin{cases}|3a+2b-2|=1\\|b+3|=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}3a+2b-2=1\\b+3=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3a+2b-2=-1\\b+3=0\end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases}a=3\\b=-3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=\dfrac{7}{3}\ (\text{不合})\\b=-3\end{cases}$

由①、②得知，共有 2 組整數數對 (a,b) 滿足

$|3a+2b-2|+|b+3|=1$

故選(3)。

2. (5)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：利用常用對數估計天文數字

解析：$a=2^{160}=(10^{\log 2})^{160}\approx 10^{0.3010\times 160}=10^{48.16}$

$b=3^{100}=(10^{\log 3})^{100}\approx 10^{0.4771\times 100}=10^{47.71}$

$c=5^{70}=(10^{\log 5})^{70}\approx 10^{0.6990\times 70}=10^{48.93}$

因此 $c>a>b$，故選(5)。

3. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

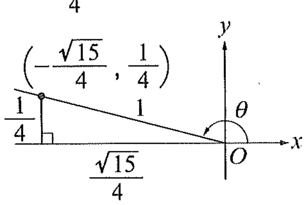
目標：斜率、三角比、極坐標及直角坐標之搭配運算

解析：由 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$ 及 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 得

$\cos^2\theta=1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{15}{16}$

又由 θ 為第二象限角知 $\cos\theta<0$

故 $\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，亦可參考下圖



而終邊為 OA 射線（O 為原點），則

所有滿足條件的 θ 都是上圖這個 θ 的同界角

〈解法一〉

直線 OA 的斜率為 $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

〈解法二〉

從 A 的極坐標 $[36,\theta]$ 轉換為 A 的直角坐標

$(x,y)=(36\cos\theta,36\sin\theta)=(-9\sqrt{15},9)$

故直線 OA 的斜率為 $\dfrac{9-0}{-9\sqrt{15}-0}=-\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

故選(4)。

4. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：能結合運用對數函數、求對稱點與兩平行直線的距離

解析：由條件可知 $A'(a,1)$，$B'(b,3)$

因為 A'、B' 均在對數函數 $y=\log_2 x$ 的圖形上

所以 $1=\log_2 a$，$3=\log_2 b$

得 $a=2$，$b=8$

因為 $\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 皆垂直對稱軸 $y=x$

所以含 $\overline{AA'}$ 的直線方程式為 $x+y=1+2=3$

含 $\overline{BB'}$ 的直線方程式為 $x+y=3+8=11$

兩直線的距離為 $\dfrac{|11-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

即為梯形 $ABB'A'$ 的高

故選(4)。

5. (1)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：熟練數據之標準化與百分位數運算

解析：由題意，

依序解 $\dfrac{x-28}{10}=-0.9$，-0.7，-0.5，-0.3 可知

x_{32}，x_{36}，x_{40}，x_{44} 分別為 19、21、23、25

今欲求第 30 百分位數

因為 $111\times 30\%=33.3$ 不是整數

所以第 30 百分位數為由小而大排列的第 34 個數，即 x_{34}

於是 $19\le x\le 21$

故選(1)。

6. (2)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：熟知等差數列與等差級數的公式

解析：設每天多背 d 個單字，則

50 天內共背了 $S_{50}=\dfrac{50(40+49d)}{2}$ 個單字

$S_{50}\ge 7000$

$\Rightarrow 25(40+49d)\ge 7000$

$\Rightarrow 40+49d\ge 280$

$\Rightarrow d\ge 4.89\cdots\cdots$

因此 d 取 5

第 35 天背 $20+34\times 5=190$ 個單字

第 36 天背 195 個單字

第 37 天背 200 個單字

故選(2)。

7. (2)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：利用直線方程式中的 x，y 係數之正負決定二元一次不等式的解，並且知道直角坐標平面上互相垂直的兩直線方程式係數的關係

解析：直線 $ax+by=0$、$bx-ay=0$ 的斜率分別為 $\frac{a}{-b}$、$\frac{b}{a}$

且由 $a>0$，$b<0$ 知

依序為一正一負且乘積等於 -1

可知兩直線互相垂直

現在，觀察五個選項中的兩直線關係

顯然只有(2)、(5)為可能的答案

接著，由 $a>0$，$b<0$，看到「若我們讓點 (x , y) 往右走或往下走，則 $ax+by$ 愈來愈大；又若我們讓點 (x , y) 往右走或往上走，則 $bx-ay$ 愈來愈小」

由此可研判

在直線 $ax+by=0$ 的右下方為 $ax+by\geq 0$

而在直線 $bx-ay=0$ 的右上方為 $bx-ay\leq 0$

故選(2)。

二、多選題

8. (3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

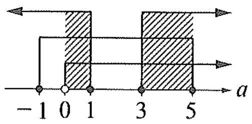
目標：結合二次函數的極值與解多項式不等式

解析：$f(x)=ax^2+4ax+a^2=a(x+2)^2+a^2-4a$ 為二次函數且有最小值 $k=a^2-4a$

因此

$$\begin{cases} a>0 \\ a^2-4a\leq 5 \\ a^2-4a\geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ (a+1)(a-5)\leq 0 \\ (a-1)(a-3)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ -1\leq a\leq 5 \\ a\geq 3 \text{ 或 } a\leq 1 \end{cases}$$

由下圖得知 $0<a\leq 1$ 或 $3\leq a\leq 5$



故選(3)(5)。

9. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能夠解析三次多項式函數、移動對稱中心與找出一次近似

解析：三次函數 $y=f(x)=2x^3-12x^2+27x-23$

$=2(x-2)^3+3(x-2)-1$

圖形的對稱中心在 $(2 , -1)$

欲將對稱中心平移至 $(-1 , 1)$

則需向左平移 3 單位，再向上平移 2 單位

得到三次函數 $y=g(x)=2(x+1)^3+3(x+1)+1$

$=2x^3+6x^2+9x+6$

(1) ○：$b+c+d=6+9+6=21$

(2) ○：因為 $g(x)=2(x+1)^3+3(x+1)+1$，

且 $2\times 3>0$，故和 x 軸只有一個交點

(3) ○：$y=g(x)$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似為

$y=3(x+1)+1=3x+4$

(4) ○：承(3)

$y=f(x)$ 在 $x=2$ 附近的一次近似為

$y=3(x-2)-1=3x-7$

其圖形平行 $y=3x+4$ 的圖形

(5) ○：承(3)

$y=f(x)=2x^3-12x^2+27x-23$

$=2(x+1)^3-18(x+1)^2+57(x+1)-64$

$y=f(x)$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似為

$y=57(x+1)-64=57x-7$

其圖形與 $y=3x+4$ 的圖形相交於一點

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

10. (2)(3)(4)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：能夠了解斜率與向量之對應方式並運用到直線與圓的問題中

解析：(1) ╳：使用中點坐標公式、向量的分點公式或利用

$\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{AK}=(-4 , -5)$ 皆可得 $B(-1 , -4)$

(2) ○：由 $K(3 , 1)$、$A(7 , 6)$ 得 $\overrightarrow{KA}=(4 , 5)$

且直線 KA 的斜率為 $\frac{5}{4}$

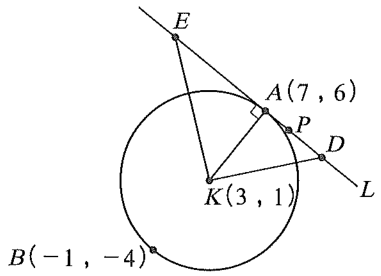
所以切線 L 的斜率為 $-\frac{4}{5}$

(3) ○：承(2)及斜率的意義知點 D 在 L 上

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \,//\, (5 , -4)$

又 $\overrightarrow{AP}=(10 , -8) \,//\, (5 , -4)$，則點 P 在 L 上

(4) ○：如下略圖



考慮 $\overrightarrow{AE}=-2022\overrightarrow{AP}$，$\overrightarrow{AD}=111\overrightarrow{AP}$

顯然 $|-2022\overrightarrow{AP}|>|111\overrightarrow{AP}|$

故 $\overline{AE}>\overline{AD}$

由勾股定理(畢氏定理)知 $\overline{KE}>\overline{KD}$

即 $|\overrightarrow{KE}|>|\overrightarrow{KD}|$

也就是 $|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AE}|>|\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}|$

〈另解〉

因為直線 L 和圓(其圓心為 K)相切於 A

而 P 在 L 上，所以 $\overrightarrow{KA}\perp\overrightarrow{AP}$

即 $\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AP}=0$

又 $P\neq A$，所以 $|\overrightarrow{AP}|>0$，於是

$|\overrightarrow{KA}-2022\overrightarrow{AP}|^2$

$=(\overrightarrow{KA}-2022\overrightarrow{AP})\cdot(\overrightarrow{KA}-2022\overrightarrow{AP})$

$=|\overrightarrow{KA}|^2+2022^2\cdot|\overrightarrow{AP}|^2-4044\overrightarrow{KA}\cdot\overrightarrow{AP}$

$=|\overrightarrow{KA}|^2+2022^2\cdot|\overrightarrow{AP}|^2$

同理 $|\overrightarrow{KA}+111\overrightarrow{AP}|^2=|\overrightarrow{KA}|^2+111^2\cdot|\overrightarrow{AP}|^2$

故 $|\overrightarrow{KA}-2022\overrightarrow{AP}|^2>|\overrightarrow{KA}+111\overrightarrow{AP}|^2$

從而 $|\overrightarrow{KA}-2022\overrightarrow{AP}|>|\overrightarrow{KA}+111\overrightarrow{AP}|$

(5)╳：以 $\overline{PQ}=6$ 為△PQC 的底邊長

則高為頂點 C 與 L 的距離

故當 $C=B$ 時產生最大的高

即為圓的直徑 $2\overline{KA}=2\sqrt{41}$

因此△PQC 面積的最大值為

$6\times 2\sqrt{41}\div 2=6\sqrt{41}$

故選(2)(3)(4)。

11. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：熟悉平面向量的運算，觀察(及分析)數列的規律、特質

解析：(1)○：正六邊形每邊等長且每個內角皆為 120°

可知題圖(一)中的 O 為正三角形 PQR 的重心

故 $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{0}$

(2)╳：因為題圖(二)是由 3 個題圖(一)的凹多邊形適當地平移到不同的位置而互相拼接出來的

所以從 A 沿著外圍的邊走到 D，可知

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OR}$

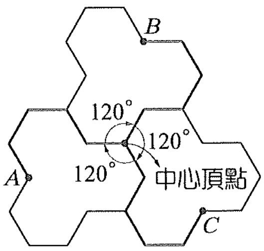
$=2\overrightarrow{OR}+2\overrightarrow{PO}=2\overrightarrow{OR}-2\overrightarrow{OP}$

(亦可連 $\overline{AD}$ 而看出同樣的結果)

(3)○：$\overrightarrow{AE}\,//\,\overrightarrow{OQ}$ 且 $\overrightarrow{AD}\,//\,\overrightarrow{PR}$，又 $\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{PR}$

故 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{AD}$，從而 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=0$

(4)○：



從中心頂點出發，沿著正六邊形的邊，

有三條互相夾 120° 且全等的彎曲路徑可分別走到 A，B，C

可知△ABC 為正三角形

〈另解〉

同選項(2)的方法分析而得到

$\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{BC}=4\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OR}$

而確定△ABC 為正三角形

(5)╳：題圖(一)、(二)的邊數各為 12、24

而將 2 個基本元件拼接會得到一個凹 20 邊形

觀察 12，20，24 皆為 4 的倍數

故可合理猜測應該只能拼接出邊數為 4 的倍數的凹多邊形

而 2022 不是 4 的倍數，故(5)錯誤

(其實，我們可觀察這裡的每 2 個基本元件互相拼接的時候，在拼接處要犧牲 2x2＝4 邊，而每個基本元件有 12 邊，由此確定只能拼接出邊數為 4 的倍數的凹多邊形)

故選(1)(3)(4)。

12. (1)(2)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：釐清數據分析的各個概念或計算之意涵

解析：(1)○：由題意，我們必須更正散布圖及相關係數

試題所附的錯誤散布圖中的 10 個點

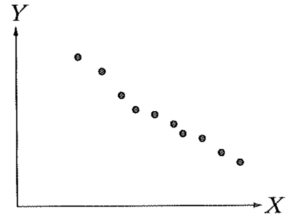
由左而右逐漸上升，相當靠近錯誤的最適直線

而這條錯誤的最適直線的斜率為正

按題意更正得到正確散布圖中正確的 10 個點

由左而右逐漸下降，相當靠近正確的最適直線

而這條正確的最適直線的斜率為負(請注意，在進行以上的思考、想像時，我們其實不一定要老老實實把正確散布圖實際畫出來，只需大致畫一下就夠了。當然也可以真的小心翼翼畫出來，正確散布圖如下所示)



可見 X，Y 的確是負相關

(2)○：由 Y 對 X 的最適直線公式

$Y-\mu_Y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X)$

知最適直線通過點 $(\mu_X,\mu_Y)=(123,76)$

(3)╳：可能有人以為

「正確的相關係數＝錯誤的相關係數×(－1)

而等於－0.98，

並由 Y 對 X 的最適直線公式

$Y-\mu_Y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X)$ 算出 $Y=1056$ 時

可估計 $X=-1377$，因此以為(3)是對的」

可是，此題由錯誤散布圖調整為正確散布圖的過程並非單純的「線型調整」

除非極湊巧，正確與錯誤的相關係數應該不會恰好只差一個負號

其次，「給定 Y 的值要估計 X 的值」應該使用

X 對 Y 的最適直線公式 $X-\mu_X=r\dfrac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y-\mu_Y)$

更何況 $Y=1056$，跟已有的 10 個 Y 的數值差太遠了(請注意，一般而言，最適直線只適合拿來進行局部估計)

(4)○：由標準差的意涵可知

$(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots\cdots+(x_{10}-x)^2$ 的最小值恰只發生在 $x=\mu_X=123$ 時

因此

$(x_1-99)^2+(x_2-99)^2+\cdots\cdots+(x_{10}-99)^2$

$>(x_1-123)^2+(x_2-123)^2+\cdots\cdots+(x_{10}-123)^2$

(5) ○：已知賣出 134 杯甲飲料

故問「甲、乙兩款飲料的總銷售量不超過 210 杯」等於問「乙款飲料的銷售量不超過 $210-134=76$ 杯」

請注意 $76=\mu_Y$

由「Y 對 X 的最適直線」的方程式

$Y-\mu_Y=r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(X-\mu_X)$

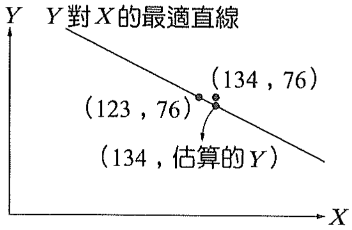
知道 Y 對 X 的最適直線」通過點

$(\mu_X , \mu_Y)=(123 , 76)$

而且斜率為 $r\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}<0$

所以，當 $X=134$ $(>123=\mu_X)$ 時

可以估算 $Y<\mu_Y=76$ (可參考下圖)



其實，我們也可以在正確的散布圖上進行觀察而判斷選項(5)是正確的

故選(1)(2)(4)(5)。

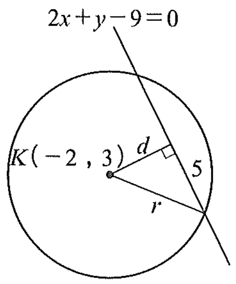
三、選填題

13. 180

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：運用距離公式及畢氏定理來處理跟圓相關的基本幾何問題

解析：如下圖，$d=\dfrac{|2\times(-2)+3-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{10}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$



所以 $r=\sqrt{5^2+d^2}=\sqrt{25+20}=\sqrt{45}$

顯然直徑 $2\sqrt{45}$ 就是外切正方形的邊長

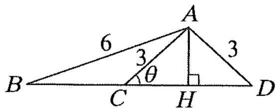
故圓的外切正方形面積為 $(2\sqrt{45})^2=180$。

14. $\dfrac{9}{4}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：對 SSA 有清晰的幾何觀察並運用正弦定理

解析：如下圖，作 $\overline{AH}\perp\overline{BD}$ 於 H



因為 $\cos B=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}>0$

所以 $\angle B$ 為銳角，且 $\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{1}{3}$

於是 $\overline{AH}=6\sin B=2$

從而 $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$

因此△ACD 的外接圓直徑為 $\dfrac{\overline{AD}}{\sin\theta}=\dfrac{9}{2}$

故得△ACD 的外接圓半徑為 $\dfrac{9}{4}$。

15. 70

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：熟知重複排列並且除去不合情況

解析：3 同 1 異：$C_1^2C_1^2\times\dfrac{4!}{3!}=16$ (種)

2 同 2 同：$C_2^3\times\dfrac{4!}{2!\,2!}=18$ (種)

2 同 2 異：$C_1^3C_2^2\times\dfrac{4!}{2!}=36$ (種)

故共有 $16+18+36=70$ (種)

〈另解〉

先預設每種口味都有 4 個或以上

因此每個孩子都有 3 種選擇

再扣除選到 4 個奶油口味、4 個紅豆口味、4 個芋頭口味、3 個芋頭口味 1 個紅豆口味、3 個芋頭口味 1 個奶油口味

故共有 $3^4-1-1-1-4-4$

$=81-11=70$ 種分配方法。

16. 300

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能夠分析情境並且從中了解期望值的概念

解析：2 顆白球與 2 顆紅球直線排列方法有

$\dfrac{4!}{2!2!}=6$ (種)

每種發生的機會皆為 $\dfrac{1}{6}$

紅紅：$\dfrac{1}{6}\times(300+200)=\dfrac{500}{6}$

紅白紅：$\dfrac{1}{6}\times(300+100)=\dfrac{400}{6}$

紅白白紅：$\dfrac{1}{6}\times(300+0)=\dfrac{300}{6}$

白紅紅：$\dfrac{1}{6}\times(200+100)=\dfrac{300}{6}$

白紅白紅：$\dfrac{1}{6}\times(200+0)=\dfrac{200}{6}$

白白紅紅：$\dfrac{1}{6}\times(100+0)=\dfrac{100}{6}$

故獎金的期望值為

$\dfrac{500+400+300+300+200+100}{6}$

$=300$ (元)。

17. 0.11

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：能夠利用等比級數計算複利概念，並比較升息前後的差別

解析：升息前月利率為 $\frac{1.32\%}{12}=0.11\%$

升息後月利率為 $\frac{1.32\%+0.24\%}{12}=0.13\%$

設升息前每月還款金額為 A 元

升息後每月還款金額為 B 元

則 $1000\times(1+0.11\%)^{240}=\frac{A[(1+0.11\%)^{240}-1]}{1+0.11\%-1}$

$\Rightarrow A=\frac{1.1\times(1.0011)^{240}}{(1.0011)^{240}-1}\approx\frac{1.1\times1.3019}{0.3019}$

≈ 4.7436

$1000\times(1+0.13\%)^{240}=\frac{B[(1+0.13\%)^{240}-1]}{1+0.13\%-1}$

$\Rightarrow B=\frac{1.3\times(1.0013)^{240}}{(1.0013)^{240}-1}\approx\frac{1.3\times1.3659}{0.3659}$

≈ 4.8529

故所求為 $B-A\approx 4.8529-4.7436=0.1093$

≈ 0.11(萬元)。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (1)(3)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：熟悉正弦函數的各個基礎概念

解析：(1)○：最大值為 $M=5+4=9$

且在 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$ 及其同界角時產生

而 $2\times\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

故 $f\left(\frac{\pi}{12}\right)=9=M$

(2)╳：最小值為 $m=-5+4=-1$

且在 $2x+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}$ 及其同界角時產生

因此產生最小值的 x 有無限多個

(3)○：$\frac{M+m}{2}=\frac{9+(-1)}{2}=4$

(4)╳：由 $f(x)=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+4$ 知振幅為 5

(5)╳：$f(x)=5\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+4$ 的週期為 $\frac{2\pi}{2}=\pi$

而函數 $g(x)=\sin x$ 的週期為 2π

故選(1)(3)。

19. $\frac{3}{4}$

出處：第一冊〈指數、對數〉、第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉、〈按比例成長模型〉

目標：熟悉正弦函數的週期、頻率並結合等比數列與指對數的基本運算

解析：設此 13 個頻率的公比為 $r>1$

由題意得 $r^{13-1}=2$，又 $r>1\Rightarrow r=2^{\frac{1}{12}}$

第 1 個聲音的週期為 $\frac{2\pi}{|a|}=\frac{2\pi}{a}$(因為 $a>0$)

而第 10 個聲音的週期為 $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{b}$(因為 $b>0$)

故頻率依序為 $\frac{a}{2\pi}$、$\frac{b}{2\pi}$

所以 $\frac{b}{a}=\frac{\text{第10個頻率}}{\text{第1個頻率}}=r^{10-1}=(2^{\frac{1}{12}})^9=2^{\frac{9}{12}}=2^{\frac{3}{4}}$

故 $\log_2\frac{b}{a}=\log_2 2^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$。

◎評分原則

設此 13 個頻率的公比為 $r>1$
由題意得 $r^{13-1}=2$，又 $r>1\Rightarrow r=2^{\frac{1}{12}}$ (1 分)
第 1 個聲音的週期為 $\frac{2\pi}{\|a\|}=\frac{2\pi}{a}$(因為 $a>0$)
而第 10 個聲音的週期為 $\frac{2\pi}{\|b\|}=\frac{2\pi}{b}$(因為 $b>0$)
故頻率依序為 $\frac{a}{2\pi}$、$\frac{b}{2\pi}$ (2 分)
所以 $\frac{b}{a}=\frac{\text{第10個頻率}}{\text{第1個頻率}}=r^{10-1}=(2^{\frac{1}{12}})^9=2^{\frac{9}{12}}=2^{\frac{3}{4}}$ (1 分)
故 $\log_2\frac{b}{a}=\log_2 2^{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$。 (1 分)

20. 18

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：熟悉正弦函數的週期、頻率並能結合指對數及科學記號的基本運算

解析：仿第 19. 題的作法，並根據題意可知

$\frac{c}{d}=\frac{\text{甲的頻率}}{\text{乙的頻率}}=2^{57}=(10^{\log 2})^{57}=10^{57\log 2}$

$\approx 10^{57\times0.3010}=10^{17.157}$

$=10^{0.157}\times10^{17}$

$=1.\cdots\cdots\times10^{17}$

(因為 $\log 1=0<0.157<0.3010\approx\log 2$)

故 $\frac{c}{d}$ 的整數部分是 18 位數(因為將 $1.\cdots\cdots\times10^{17}$ 的 $1.\cdots\cdots$ 其小數點右移 17 位)。

◎評分原則

仿第 19. 題的作法，並根據題意可知
$\frac{c}{d}=\frac{\text{甲的頻率}}{\text{乙的頻率}}=2^{57}=(10^{\log 2})^{57}=10^{57\log 2}$
$\approx 10^{57\times0.3010}=10^{17.157}$ (2 分)
$=10^{0.157}\times10^{17}$
$=1.\cdots\cdots\times10^{17}$ (2 分)
(因為 $\log 1=0<0.157<0.3010\approx\log 2$)
故 $\frac{c}{d}$ 的整數部分是 18 位數(因為將 $1.\cdots\cdots\times10^{17}$ 的 $1.\cdots\cdots$ 其小數點右移 17 位)。 (1 分)