

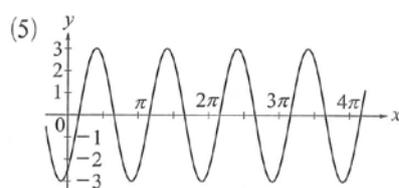
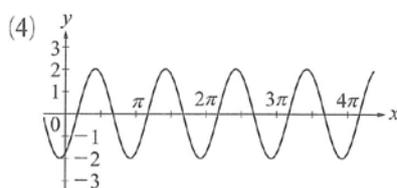
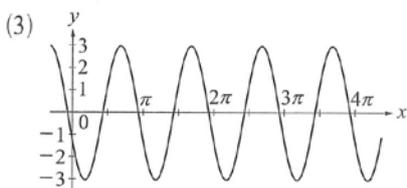
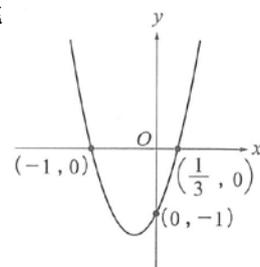
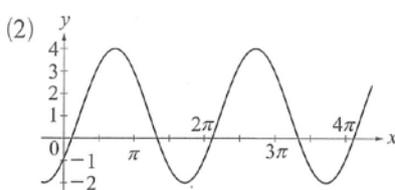
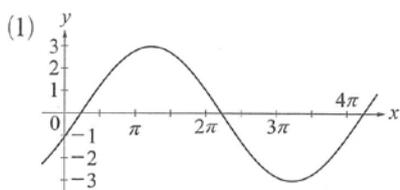
臺中市高級中學 112 學年度學科能力測驗第一次模擬考

第壹部分：選擇題(占 85 分)



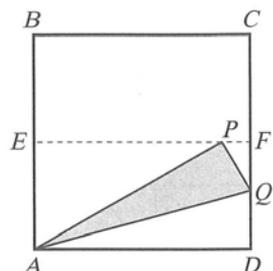
一、單選題(占 30 分)

- $\log 2024$ 最接近下列哪個數字？(1) 3.2 (2) 3.3 (3) 3.4 (4) 3.5 (5) 3.6
- 若 a 為實數，已知方程式 $|x-a|+|x+2a|=6$ 恰有兩解，則下列何者可能為 a 值？
(1) -4 (2) -2 (3) 0 (4) 2 (5) 4
- 設 a, b 為實數，已知坐標平面上三點 $O(0,0)$ ， $A(8,0)$ ， $B(0,3)$ ，若 $(3\vec{OA}+b\vec{OB}) \perp (a\vec{OA}-2\vec{OB})$ ，則 $\frac{b}{a}$ 之值為下列何者？(1) $\frac{8}{3}$ (2) $\frac{16}{3}$ (3) $\frac{32}{3}$ (4) $\frac{3}{8}$ (5) $\frac{3}{16}$
- 不等式 $(x+5)^2(x^2-x+1)(3x-5) \geq (x+5)^2(x^2-x+1)(3x-5)^2$ 的整數解之和為何？
(1) -3 (2) -1 (3) 1 (4) 2 (5) 3
- 某人每餐都有吃水果的習慣，今天一早起來，發現家裡還有 13 顆水果，分別為 4 顆蘋果、3 顆橘子、2 顆奇異果、2 顆水蜜桃、1 顆芭樂、1 顆蓮霧。他決定今天的早、中、晚餐各吃一顆水果，且從家裡現有的水果中挑選，若同種水果視為相同物，則他今天三餐水果有幾種分配的方式？(1) 32 種 (2) 82 種 (3) 120 種 (4) 182 種 (5) 242 種
- 設 a, b, c 為實數，若 $y = ax^2 + bx + c$ 的圖形如右圖，則下列何者可能為 $y = a \sin(bx + c)$ 的圖形？



二、多選題(占 25 分)

- 請選出正確的選項。(1) 若 a, b 為實數，則 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (2) 若 $x > 0$ ，則 $x + \frac{9}{x}$ 的最小值為 6 (3) 若 θ 為銳角，則 $\sin \theta + \frac{9}{\sin \theta}$ 的最小值為 6 (4) 若 $x > 0$ ，則 $x^2 - 3x + 1 + \frac{9}{x^2 - 3x + 1}$ 的最小值為 6 (5) 若 x 為實數，且 $\frac{(x^2+x+1)+(x^2+3x+5)}{2} = \sqrt{(x^2+x+1)(x^2+3x+5)}$ ，則 $x = -2$
- 有一邊長為 8 的正方形色紙 $ABCD$ ，將其對摺使 A 與 B 重疊、 C 與 D 重疊後攤開產生摺痕 EF (如右圖所示)。已知 Q 為 \overline{FD} 上一點， P 為 \overline{EF} 上一點，將三角形 $\triangle ADQ$ 沿 \overline{AQ} 對摺後， \overline{AD} 恰好與 \overline{AP} 重疊。請選出正確的選項。(1) $\overline{EP} = 4\sqrt{3}$ (2) $\triangle ADP$ 的面積為 16 (3) $\angle QAD = 15^\circ$ (4) $\overline{QD} = 16 - 8\sqrt{3}$ (5) $\triangle PQD$ 的外接圓面積大於 16π



9. 已知多項式函數 $f(x)$ 的廣域(大域)特徵與 $y = 2x^3$ 近似，在 $x=1$ 附近的一次近似為 $y = 5x - 4$ ，且對稱中心為 $(2, k)$ ，請選出正確的選項。
- (1) $f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 1 (2) $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 1 (3) $f(3) = 3$
 (4) $k = -2$ (5) 設 $a, p \in R$ ，若 $y = f(x)$ 的圖形經平移後可與 $y = ax^3 + px$ 的圖形重疊，則 $a + p = 1$

10. ETF 的全名是 Exchange Traded Fund，中文名為指數股票型基金，意思是 ETF 將追蹤某個指數，並可在股票交易所買賣。而所謂的現金股利 1 元，代表持有 1 股就可以在配發現金股利時領到 1 元。某人觀察某高配息 ETF 每年的價格都在 15~17 元之間，且每年穩定配發 1 元現金股利 1 次，他預計每年年初用 120000 元以每股 16 元的價格購入此 ETF，並於隔年年初將前一年所得之股利加上 120000 元全數再以每股 16 元的價格購入此 ETF，以此類推，一直購入此 ETF 且絕不出售。假設他每年年初都能以每股 16 元完成購買，且此 ETF 每年也固定配發 1 元股利 1 次，若忽略股數、股利須為整數這些條件，則下列敘述哪些正確？

n	31	32	33	34	35	36	37	38	39
$\left(\frac{17}{16}\right)^n$	6.55	6.96	7.39	7.86	8.35	8.87	9.42	10.01	10.64

- (1) 第一年年初用 120000 元以每股 16 元的價格購入此 ETF，可購買 7500 股
 (2) 第一年配發現金股利時、某人可配的股利 7500 元 (3) 第二年某人年初購買 ETF 後，會有 15468.75 股 (4) 某一筆 120000 元購買的股數放至第 k 年底，包含此筆現金股利購買的部分，累積會有 $7500\left(\frac{17}{16}\right)^k$ 股 (5) 若他想達到總股數 1 百萬股(稱為存股)的目標，則最少需要 37 年

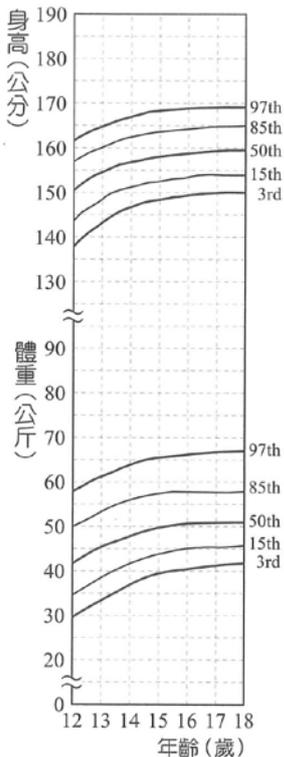
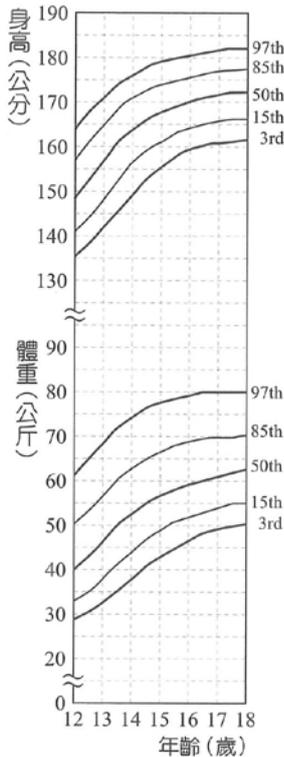
11. 下列兩圖分別為臺灣男生、女生 12 歲到 18 歲的生長(身高、體重)曲線圖：

臺灣男生生長曲線圖

臺灣女生生長曲線圖

身高暨體重第 3、15、50、85、97 百分位曲線

身高暨體重第 3、15、50、85、97 百分位曲線



資料來源：臺灣兒科醫學會網站

某校高三的 10 位學生之身高體重如下表：

	男生					女生				
身高(公分)	166	167	170	174	178	160	162	164	168	171
體重(公斤)	45	81	56	72	96	46	52	60	64	68

已知這 10 人年齡皆滿 17 歲但未滿 18 歲，男生、女生平均身高分別為 171、165 公分且男生、女生平均體重分別為 70、58 公斤，若 x 為身高、 y 為體重，則根據上述資料，所得 y 對 x 的迴歸(最適)直線方程式為 $y = a + bx$ ，下列選項何者正確？

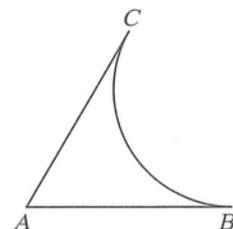
- (1) 此 10 人中，體重 52 公斤的女生，其體重低於至少 85% 的臺灣同年齡女生人口
- (2) 此 10 人中，身高達同年齡該性別中位數以上(含)的人數為 7 人
- (3) 此 10 人中，身高為第 70 百分位數介於 170 公分到 171 公分之間
- (4) 此 10 人中，身高為標準差為 $3\sqrt{3}$ 公分
- (5) 測量體重時，體重計校準歸零有誤，重新校準後，每個人的體重都要減 2 公斤。若修正後數據的迴歸(最適)直線方程式為 $y = c + dx$ ，則 $d = b > 0$ 且 $c = a - 2$

三、選填題(占 30 分)

12. 已知某數列的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \sin(90^\circ \times n^2), n \geq 2 \end{cases}$ ，則前 100 項的和為_____。

13. 已知直線 $L: \frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$ 與圓 $C: (x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ ，今擲一顆公正骰子一次，出現點數為 a ，則 L 與 C 沒有交點的機率為_____。(化為最簡分數)

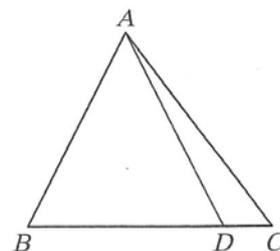
14. 右圖為某大型裝置藝術的平面圖，已知圓弧 \widehat{BC} 與 \overline{AB} 相切於 B 點且與 \overline{AC} 相切於 C 點，且測量出 \overline{AB} 的長為 6 公尺， $\angle CAB = 60^\circ$ 。若此裝置藝術平面圖的面積為 $a\sqrt{b} + c\pi$ ，其中 a 、 b 、 c 為整數，且 $b < 5$ ，則 $a + b + c =$ _____。



15. 某超商舉辦「飲料抽抽樂活動」，活動辦法如下：「購買 2 瓶飲料，可抽獎 1 次。獎項為兩瓶中較低價的那瓶飲料享「打 8 折」、「打 5 折」或「1 元」三種之一的優惠。」已知抽中打 8 折的機率為 50%，抽中打 5 折的機率為 40%，抽中 1 元的機率為 10%。若某人買了一瓶 30 元和一瓶 40 元的飲料，則他付款金額的期望值為_____元。

16. 若 $y = f(x)$ 的函數圖形與 $y = -1 + \log_3 x$ 的函數圖形對稱於直線 $y = x$ ，且 $f(50)$ 為 m 位數字，則 $m =$ _____。

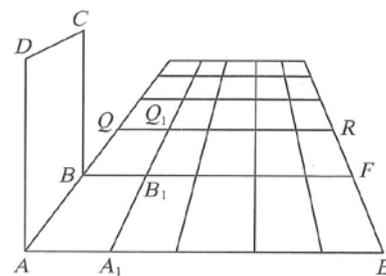
17. 如右圖， $\triangle ABC$ 中， D 為 \overline{BC} 上一點且 $\overline{AB} = \overline{AD} = 2\sqrt{5}$ ， $\overline{BD} = 4$ ， $\overline{CD} = 1$ ，若 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的外接圓半徑分別為 R_1 、 R_2 ，則 $\frac{R_2}{R_1} =$ _____。



第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-20 題為題組

一走廊的地板由大小相同的長方形木板排列而成，且在左側牆面上有一長方形的門。某人在圖紙上，將其繪製成單點透視圖，如右圖，圖中 $ABCD$ 為門，四邊形 ABB_1A_1 及四邊形 BQQ_1B_1 所對應的為實際地板上相同的兩塊長方形木板。單點透視圖中地板上的點 A 、 B 、 Q 共線， E 、 F 、 R 共線，且三直線 \overleftrightarrow{AB} 、 \overleftrightarrow{CD} 、 \overleftrightarrow{EF} 交於一點 P (即為消失點)，若圖中 $\overline{AE} = 20$ ， $\overline{EF} = 15$ 且 $\overline{AE} \parallel \overline{BF} \parallel \overline{QR}$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，試回答下列問題。



18. $\overrightarrow{BC} = \frac{\quad}{\quad} \overrightarrow{AD}$ 。(化為最簡分數)(選填題，3 分)

19. 已知題圖中， \overline{QE} 和 \overline{AR} 的交點必在 \overline{BF} 上，試求該單點透視圖中 $\frac{\overline{QB}}{\overline{BA}}$ 之值為多少？
(非選擇題，6 分)

20. 若在圖紙上建立平面坐標系， $A(0,0)$ ， $E(20,0)$ ，且 $\cos \angle BAE = \frac{3}{5}$ ， $\cos \angle FEA = \frac{5}{13}$ ，

試以二元一次聯立不等式表示 $\triangle APE$ 的區域(含內部與邊界)。(非選擇題，6 分)
(不等式請以 $ax + by + c \geq 0$ 或 $ax + by + c \leq 0$ 表示，其中 $a \geq 0$ ，且 a 、 b 、 c 為最簡整數比)

RB307 臺中市高級中學 112 學年度學科能力測驗第一次模擬考

參考答案

選擇題：1. (2) 2. (3) 3. (3) 4. (1) 5. (4) 6. (5) 7. (2)(5) 8. (1)(2)(3)(4)(5)

9. (1)(3)(5) 10. (1)(2)(3)(5) 11. (2)(3)(4)(5)

選填題：12. 2550 13. $\frac{5}{6}$ 14. 11 15. 58.1 16. 25 17. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

混合題：18. $\frac{3}{4}$ 19. $\frac{3}{5}$ 20.
$$\begin{cases} y \geq 0 \\ 4x - 3y \geq 0 \\ 12x + 5y - 240 \leq 0 \end{cases}$$