數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(3)	(3)	(1)	(4)	(5)	(2)(5)
8.	9.	10.	11.			
(1)(2)(3)(4)(5)	(1)(3)(5)	(1)(2)(3)(5)	(2)(3)(4)(5)			

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：對數律的運算與估計

解析：$\because \log 2000=\log(2\times1000)=\log 2+3\approx 3.301$

$\log 2048=\log 2^{11}=11\times\log 2\approx 3.311$

$\therefore \log 2000\le\log 2024\le\log 2048$

$\Rightarrow \log 2024$ 最接近 3.3，故選(2)。

2. (3)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：對絕對值方程式解的理解

解析：$|x-a|+|x+2a|=|a-x|+|x+2a|\ge|3a|$

當 $6>|3a|$ 時會有兩解

$\therefore -2<a<2$，故選(3)。

〈另解〉

(1) $|x+4|+|x-8|=6<12$ 無解

(2) $|x+2|+|x-4|=6$ 無限多組解

(3) $|x|+|x|=6$ 恰有兩解

(4) $|x-2|+|x+4|=6$ 無限多組解

(5) $|x-4|+|x+8|=6<12$ 無解

故選(3)。

3. (3)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量垂直性質

解析：$3\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}=(24,3b)$

$a\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}=(8a,-6)$

$\because (24,3b)\perp(8a,-6)$

$\therefore 192a-18b=0\Rightarrow \dfrac{b}{a}=\dfrac{192}{18}=\dfrac{32}{3}$

故選(3)。

4. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：求解多項式不等式

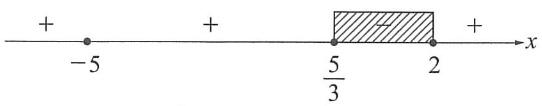
解析：$(x+5)^2(x^2-x+1)(3x-5)\ge(x+5)^2(x^2-x+1)(3x-5)^2$

$\Rightarrow (x+5)^2(x^2-x+1)[(3x-5)^2-(3x-5)]\le 0$

$\Rightarrow (x+5)^2(x^2-x+1)(3x-5)(3x-6)\le 0$

$\because x^2-x+1$ 恆正

得 $(x+5)^2(3x-5)(3x-6)\le 0$



$\Rightarrow x=-5$ 或 $\dfrac{5}{3}\le x\le 2$

故整數解之和為 $(-5)+2=-3$

故選(1)。

5. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能夠根據有相同物排列的狀況做討論分類

解析：早中晚的水果種類可能為：

① 3 個都相同：$C^2_1\times1=2$

② 2 個相同 1 個相異：$C^4_1\times C^5_1\times\dfrac{3!}{2!}=60$

③ 3 個全部相異：$C^6_3\times3!=120$

$\therefore$共有 $2+60+120=182$ 種分配方式，故選(4)。

6. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉、

第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：求二次函數；能判斷正弦函數圖形的振幅、週期與平移

解析：設 $y=p(x+1)(3x-1)$，將 $(0,-1)$ 代入得 $p=1$

$\Rightarrow y=(x+1)(3x-1)=3x^2+2x-1$

$\Rightarrow a=3$，$b=2$，$c=-1$

$y=3\sin(2x-1)=3\sin\left[2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\right]$

其圖形振幅為 3 (最大值為 3，最小值為 -3)，

週期為 $\dfrac{2\pi}{2}=\pi\approx 3.14$

且為 $y=3\sin 2x$ 的圖形向右平移 $\dfrac{1}{2}$ 單位，即過 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，故選(5)。

二、多選題

7. (2)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：對算幾不等式的理解

解析：(1) ╳：a 和 b 皆需大於等於 0 才對

(2) ○：$x+\dfrac{9}{x}\ge 2\cdot\sqrt{x\cdot\dfrac{9}{x}}=6$，等式成立於 $x=\dfrac{9}{x}$

$\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=3$ (負不合)

(3) ╳：等式成立時 $\sin\theta=3$

$\because 0<\sin\theta<1$ $\therefore$不合

(4) ╳：x^2-3x+1 可能小於 0，不能直接用算幾不等式

例如：當 $x=1$ 時，$x^2-3x+1+\dfrac{9}{x^2-3x+1}=-10$

故最小值不為 6

(5) ○：等式成立時，$x^2+x+1=x^2+3x+5\Rightarrow x=-2$

故選(2)(5)。

8. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比及三角形面積公式的基本運算、能判斷圓內接四邊形的性質

解析：(1) ○：$\because \overline{AD}=8=\overline{AP}$，$\overline{AE}=4$

$\therefore \overline{EP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{AE}^2}=4\sqrt{3}$

(2) ○：承(1) $\because \angle EPA=\angle PAD=30^\circ$

$\therefore \triangle ADP$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times8\times8\times\sin 30^\circ=16$

(3) ○：$\because \angle PAQ=\angle QAD=\dfrac{1}{2}\times\angle PAD=15^\circ$

(4) ○：令 $\overline{QD}=x=\overline{PQ}$，

則 $\overline{FQ}=4-x$，$\overline{PF}=8-4\sqrt{3}$

在△PFQ 中，$x^2=(4-x)^2+(8-4\sqrt{3})^2$，

得 $x=16-8\sqrt{3}$

〈另解〉

$\dfrac{\overline{QD}}{\overline{AD}}=\tan 15^\circ \Rightarrow \overline{QD}=8\times(2-\sqrt{3})=16-8\sqrt{3}$

(5) ○：∵ $\angle APQ=\angle ADQ=90^\circ$，四邊形 $ADQP$ 對角互補，故有一圓通過此四點，且此圓的直徑為 $\overline{AQ}=2R>\overline{AD}=8$

∴$R>4$，故外接圓面積為 $\pi R^2>16\pi$

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

9. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能理解餘式定理並求解餘式、能理解三次函數的性質與對稱中心

解析：設 $f(x)=2(x-1)^3+b(x-1)^2+5(x-1)+1$

$=2(x-2)^3+p(x-2)+k$

(1) ○：$f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 $f(1)=1$

(2) ╳：$f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 的餘式為 $5(x-1)+1=5x-4$

(3) ○：展開 $f(x)$ 後得

$f(x)=2(x^3-3x^2+3x-1)+b(x^2-2x+1)$

$+5(x-1)+1$

$=2(x^3-6x^2+12x-8)+p(x-2)+k$

比較 x^2 項的係數：$-6+b=-12$，得 $b=-6$

故 $f(x)=2(x-1)^3-6(x-1)^2+5(x-1)+1$

∴$f(3)=2\times8-6\times4+5\times2+1=3$

(4) ╳：$f(2)=2-6+5+1=2=k$

(5) ○：$f(x)=2(x-2)^3+p(x-2)+2$

$\Rightarrow f(3)=2+p+2=3 \Rightarrow p=-1$

∴$a+p=2+(-1)=1$，故選(1)(3)(5)。

10. (1)(2)(3)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：運用數列與級數的概念解決生活可能遇到的情境

解析：(1) ○：$\dfrac{120000}{16}=7500$ 股

(2) ○：承(1)，可配得 7500 元

(3) ○：第一年的 120000 元：

$7500+\dfrac{7500}{16}=7500\times\left(\dfrac{17}{16}\right)=7968.75$ 股

第二年的 120000 元：7500 股

故共計有 15468.75 股

(4) ╳：某一筆 120000 元購買的股數放至第 k 年底會有

$\dfrac{120000}{16}\times\left(\dfrac{17}{16}\right)^{k-1}=7500\left(\dfrac{17}{16}\right)^{k-1}$ 股

(5) ○：設需要 n 年，則總股數為

$7500\left(\dfrac{17}{16}\right)^{n-1}+7500\left(\dfrac{17}{16}\right)^{n-2}+\cdots\cdots+7500$

$=7500\times\dfrac{\left(\dfrac{17}{16}\right)^{n}-1}{\dfrac{17}{16}-1}>1000000$

$\Rightarrow\left(\dfrac{17}{16}\right)^{n}-1>\dfrac{25}{3}$

$\Rightarrow\left(\dfrac{17}{16}\right)^{n}>\dfrac{28}{3}\approx 9.33$

由題目之參考數據可知 n 至少為 37

故選(1)(2)(3)(5)。

11. (2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：能讀懂圖表意涵，並了解百分位數的意義；能統整數據並計算平均數、標準差、相關係數及迴歸(最適)直線等數據

解析：(1) ╳：女生體重 52 公斤大於第 15 百分位數

(2) ○：17～18 歲男生身高中位數 (第 50 百分位數) 大約為 172～173 公分，有 2 人身高在 172 公分以上；17～18 歲女生身高中位數低於 160 公分，有 5 人身高在 160 公分以上，故共有 7 人

(3) ○：$10\times70\%=7$

∴由小到大排列後，第 70 百分位數介於第 7 (170 公分) 和第 8 (171 公分) 之間

(4) ○：此 10 人平均身高為 $\dfrac{171+165}{2}=168$ 公分

身高的標準差為

$\sqrt{\dfrac{(-2)^2+(-1)^2+2^2+6^2+10^2+(-8)^2+(-6)^2+(-4)^2+0^2+3^2}{10}}$

$=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$

(5) ○：∵身高和體重為正相關 ∴$b>0$，又 $Y'=Y-2$，相關係數、標準差皆不變，故斜率不變，即 $b=d>0$，又所有數據向下平移 2 單位，故迴歸直線也會向下平移 2 單位，得 $c=a-2$

故選(2)(3)(4)(5)。

三、選填題

12. 2550

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈三角比〉

目標：遞迴關係式與三角比的運算

解析：$a_2=a_1+\sin 360^\circ=a_1=1$

$a_3=a_2+\sin 810^\circ=a_2+\sin 90^\circ=2$

$a_4=a_3+\sin(360^\circ\times4)=a_3=2$

當 n 為奇數：$a_n=a_{n-1}+1$，當 n 為偶數：$a_n=a_{n-1}$

故此數列為 1，1，2，2，3，3，4，4，……

∴$S_{100}=(1+2+3+\cdots\cdots+50)\times2=2550$。

13. $\dfrac{5}{6}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：結合直線與圓相交狀況與機率

解析：圓 C 的圓心為 $O(a,a)$，半徑為 1

直線 L：$x+y=a$，

則 $d(O,L)=\dfrac{|a+a-a|}{\sqrt{2}}>1\Rightarrow|a|>\sqrt{2}$

又 $a>0\Rightarrow a>\sqrt{2}$

∴$a=2$，3，4，5，6

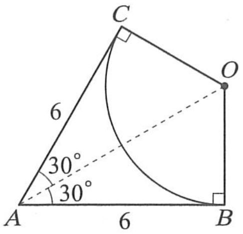
故所求機率為 $\dfrac{5}{6}$。

14. 11

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：熟悉三角比及扇形面積公式

解析：設圓弧圓心為 O，如下圖，則 $\overline{OB} \perp \overline{AB}$ ，$\overline{OC} \perp \overline{AC}$



又 $\overline{AB}=6$ $\therefore \overline{OB}=\overline{OC}=2\sqrt{3}$ ，$\angle BOC=\dfrac{2\pi}{3}$

故所求面積為

(四邊形 $ABOC$ 的面積)－(扇形 BOC 的面積)

$=6\times 2\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\times(2\sqrt{3})^2\times\dfrac{2\pi}{3}$

$=12\sqrt{3}-4\pi$

$\therefore a+b+c=12+3+(-4)=11$。

15. 58.1

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：期望值在生活中的應用

解析：$(40+30\times0.8)\times0.5+(40+30\times0.5)\times0.4+(40+1)\times0.1$

$=32+22+4.1=58.1$ (元)。

16. 25

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：熟悉指對數函數圖形性質及科學記號

解析：$y=-1+\log_3 x \Rightarrow y+1=\log_3 x$

對稱於直線 $y=x$ 後為 $x+1=\log_3 y \Rightarrow y=f(x)=3^{x+1}$

故 $f(50)=3^{51}\approx 10^{0.4771\times51}=10^{24.3321}=10^{0.3321}\times10^{24}$

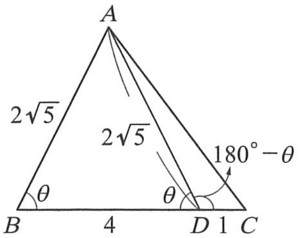
故 $f(50)$ 為 25 位數 $\therefore m=25$。

17. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正、餘弦定理

解析：如下圖，設 $\angle ABD=\theta$



$\cos\theta=\dfrac{20+16-20}{2\times2\sqrt{5}\times4}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

由餘弦定理，在△ACD 中

$\overline{AC}^2=20+1-2\times2\sqrt{5}\times1\times\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=25$

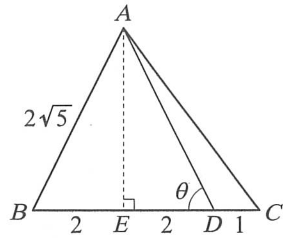
$\Rightarrow \overline{AC}=5$

故由正弦定理得

$\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\dfrac{\overline{AC}}{\sin(180^\circ-\theta)}}{\dfrac{\overline{AB}}{\sin\theta}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ 。

〈另解〉

作 $\overline{AE}\perp\overline{BD}$ 於 E 點，令 $\angle ADB=\theta$



$\because$△ABD 為等腰三角形

$\therefore \overline{BE}=\overline{DE}=2$，

$\overline{AE}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BE}^2}=4$，$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AE}^2+\overline{CE}^2}=5$

故 $\dfrac{R_2}{R_1}=\dfrac{\dfrac{\overline{AC}}{2\sin\angle ADC}}{\dfrac{\overline{AB}}{2\sin\angle ADB}}=\dfrac{\dfrac{5}{2\sin(180^\circ-\theta)}}{\dfrac{2\sqrt{5}}{2\sin\theta}}=\dfrac{5}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

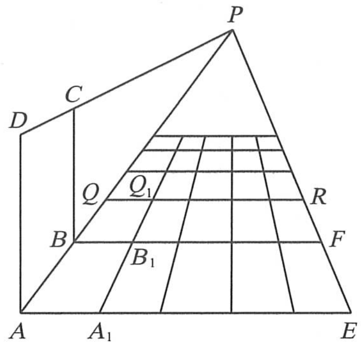
第貳部分、混合題或非選擇題

18. $\dfrac{3}{4}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：能理解單點透視圖的比例關係

解析：消失點 P 如下圖所示



可知 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{PB}}{\overline{PA}}=\dfrac{\overline{BF}}{\overline{AE}}=\dfrac{15}{20}=\dfrac{3}{4}$

故 $\overrightarrow{BC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ 。

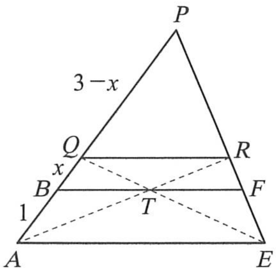
19. $\dfrac{3}{5}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：能理解單點透視圖的比例關係

解析：如下圖

令 $\overline{QE}$ 和 $\overline{AR}$ 的交點為 T，且 T 必為 $\overline{BF}$ 中點，$\overline{BT}=\dfrac{15}{2}$



設 $\dfrac{\overline{QB}}{\overline{BA}}=\dfrac{x}{1}$ $\because \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QA}}=\dfrac{\overline{BT}}{\overline{AE}}$

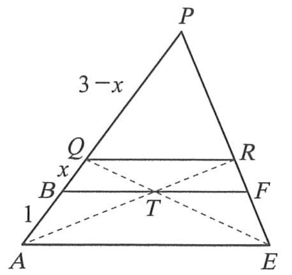
$\therefore \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\dfrac{15}{2}}{20}=\dfrac{3}{8}$，得 $x=\dfrac{3}{5}$ 。

◎評分原則

如下圖

令 $\overline{QE}$ 和 $\overline{AR}$ 的交點為 T，且 T 必為 $\overline{BF}$ 中點，$\overline{BT}=\dfrac{15}{2}$

(1 分)



設 $\dfrac{\overline{QB}}{\overline{BA}}=\dfrac{x}{1}$

$\because \dfrac{\overline{QB}}{\overline{QA}}=\dfrac{\overline{BT}}{\overline{AE}}$ (2 分)

$\therefore \dfrac{x}{x+1}=\dfrac{\frac{15}{2}}{20}=\dfrac{3}{8}$

得 $x=\dfrac{3}{5}$。 (3 分)

20. $\triangle APE$ 的區域為 $\begin{cases} y\geq 0 \\ 4x-3y\geq 0 \\ 12x+5y-240\leq 0 \end{cases}$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：能知道斜率與 tan 值的關聯、能寫出給定區域的二元一次聯立不等式

解析：$\overleftrightarrow{PA}$：$y=\dfrac{4}{3}x\Rightarrow 4x-3y=0$

$\overleftrightarrow{PE}$：$y=-\dfrac{12}{5}(x-20)\Rightarrow 12x+5y-240=0$

以二元一次聯立不等式表示$\triangle APE$ 區域 (含內部與邊界)：$\begin{cases} y\geq 0 \\ 4x-3y\geq 0 \\ 12x+5y-240\leq 0 \end{cases}$

◎評分原則

$\overleftrightarrow{PA}$：$y=\dfrac{4}{3}x\Rightarrow 4x-3y=0$ (2 分)

$\overleftrightarrow{PE}$：$y=-\dfrac{12}{5}(x-20)\Rightarrow 12x+5y-240=0$ (2 分)

以二元一次聯立不等式表示$\triangle APE$ 區域 (含內部與邊界)：

$\begin{cases} y\geq 0 \\ 4x-3y\geq 0 \\ 12x+5y-240\leq 0 \end{cases}$ (2 分)