全國公私立高級中學112學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學B考科解析

考試日期：112年11月1~2日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
3	3	3	3	2	1	124	25	45	1245	34	24	1	1	1
14-2	14-3	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	16-4	17-1	17-2	17-3	17-4	18	19
6	8	1	6	5	1	8	3	7	2	3	4	3	135	
20														

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. n 年後性能是今年的 $2^{\frac{n}{1.5}}>10$，

$(10^{\log 2})^{\frac{n}{1.5}}\geq 10^1$，因為底數 $10>1$ 所以 $(\log 2)(\frac{n}{1.5})\geq 1$

$\Rightarrow n\geq\dfrac{1.5}{0.3010}\approx 4.9$，故至少5年，

故選(3)。

2. 由圖知，$0<a<1$，$y=\log_a(-x)-\dfrac{1}{4}$ 的圖形是

$y=\log_a x$ 的圖形對稱 y 軸後，再下移 $\dfrac{1}{4}$。

故選(3)。

3. $(x-1)^2+(y-m)^2=-2m^2-m+5+1+m^2=-m^2-m+6$

$\Rightarrow -m^2-m+6>0\Rightarrow(m+3)(m-2)<0$，

所以 $-3<m<2$。

又圓心 y 坐標 $m\leq 1\Rightarrow -3<m\leq 1$，

滿足條件之整數 m 的個數為4個，

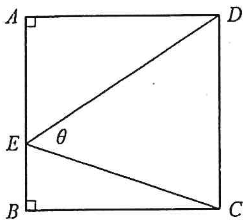
故選(3)。

4. 依序從高一的500人抽30人、高二的500人抽60人、高三的500人抽30人，

故抽樣有 $C_{30}^{500}\,C_{60}^{500}\,C_{30}^{500}$ 種不同結果。

故選(3)。

5. <法一>



$\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=3$，$\overline{AE}=2$，

$\overline{EB}=1$，$\overline{DE}=\sqrt{13}$，$\overline{EC}=\sqrt{10}$，

由餘弦定理得

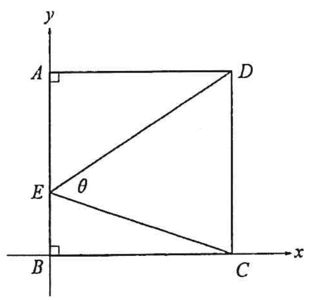
$$\cos\angle CED=\frac{\overline{ED}^2+\overline{EC}^2-\overline{CD}^2}{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{EC}}$$

$$\Rightarrow\cos\theta=\frac{13+10-9}{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{EC}}=\frac{14}{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{EC}}，$$

$$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{ED}=\overline{CE}\cdot\overline{ED}\cdot\cos(\pi-\theta)=\overline{CE}\cdot\overline{ED}\cdot(-\cos\theta)$$

$$=\overline{CE}\cdot\overline{ED}\cdot\left(-\frac{14}{2\cdot\overline{ED}\cdot\overline{EC}}\right)=-7。$$

<法二>



如圖坐標化，

令 $B(0,0)$，$A(0,3)$，$C(3,0)$，$E(0,1)$，$D(3,3)$，

所以 $\overrightarrow{CE}=(-3,1)$，

$\overrightarrow{ED}=(3,2)$

$\Rightarrow\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{ED}=(-3)\cdot 3+1\cdot 2$

$=-7$。

故選(2)。

6. (Ⅰ)當 $x\geq 1$ 時，原不等式為 $2(x+2)+(x-1)\leq 5-x$

$\Rightarrow 2x+4+x-1\leq 5-x\Rightarrow 4x\leq 2$，

所以 x 在此範圍無解。

(Ⅱ)當 $-2\leq x<1$ 時，原不等式為 $2(x+2)+(-x+1)\leq 5-x$

$\Rightarrow 2x+4-x+1\leq 5-x\Rightarrow 2x\leq 0$，

所以 $-2\leq x\leq 0$。

(Ⅲ)當 $x<-2$ 時，原不等式為 $2(-x-2)+(-x+1)\leq 5-x$

$\Rightarrow 2x\geq -8$，所以 $-4\leq x<-2$。

由(Ⅰ)∪(Ⅱ)∪(Ⅲ)得 $-4\leq x\leq 0$，

故選(1)。

二、多選題

7. (1) ○：$a_2=a_1+3=5$，$a_3=a_2+3=8$。

(2) ○：$\langle a_n\rangle$ 的首5項和 $=2+5+8+11+14=40$。

(3) ×：$b_1=a_1=2$，$b_2=b_1+a_2=7$，$b_3=b_2+a_3=15$。

(4) ○：$b_4=b_3+a_4=26$，$b_5=b_4+a_5=40$。

(5) ×：因為 $b_{20}=\langle a_n\rangle$ 的首20項和

$$=\frac{[2\times 2+(20-1)\times 3]\times 20}{2}=610。$$

故選(1)(2)(4)。

8. 由題敘條件可知，所得的數為 $((3^2)^2)^2=3^{2\times 2\times 2}=3^8$。

由指數律知，$3^8=9^4=81^2$。

故選(2)(5)。

9. (1) ×：原本迴歸直線的斜率為 $\dfrac{1}{4}=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}$

$\Rightarrow\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow\sigma_y<\sigma_x$。

(2) ×：設新的數學成績為 $x'\Rightarrow x'=\dfrac{5}{4}x+20$，$y$ 沒有調整，

因為 $\dfrac{5}{4}>0$，所以相關係數不變。

(3) ×：承(2) $\Rightarrow x=\dfrac{4}{5}(x'-20)=\dfrac{4}{5}x'-16$，

所以新迴歸直線方程式

$y=\dfrac{1}{4}(\dfrac{4}{5}x'-16)+50=\dfrac{1}{5}x'+46$。

(4) ○：$\mu'_x=\dfrac{5}{4}\cdot\mu_x+20\Rightarrow 70=\dfrac{5}{4}\cdot\mu_x+20$，所以 $\mu_x=40$。

(5) ○：承(4)，$\mu_x=40$，又 (μ_x,μ_y) 在 $y=\dfrac{1}{4}x+50$ 上

$\Rightarrow\mu_y=\dfrac{1}{4}\cdot 40+50=60$。

故選(4)(5)。

10. (1) ○：若 $k=0$，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OP}\,/\!/\,\overrightarrow{OB}$，

所以 $O-P-B$ 三點共線。

(2) ○ (3) ×：若 $k=\dfrac{2}{3}$，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，

且 $\overline{AP}:\overline{BP}=1:2$。

(4) ○：因為 $k=\frac{3}{4}>0$，且 $\frac{3}{4}+\frac{1}{3}=\frac{13}{12}>1$，
所以 P 點落在區域Ⅱ。

(5) ○：若 $k=1$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OP}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+|\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}|^2$

$=9+\frac{2}{3}\times3\times3\times\cos 60°+\frac{1}{9}\times3^2=13$

$\Rightarrow |\overrightarrow{OP}|=\sqrt{13}$。

故選(1)(2)(4)(5)。

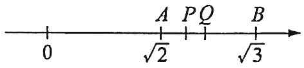
11. (1) ×：$3.1\overline{9}=3.1+0.0\overline{9}=3.1+\frac{9}{90}=3.2$。

(2) ×：<法一>

令 $A(\sqrt{2}),B(\sqrt{3}),P(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}),Q(\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5})$

$\Rightarrow \overline{AP}:\overline{PB}=1:2$，$\overline{AQ}:\overline{QB}=2:3$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}<\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}$。

如右圖所示 

<法二>

$\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{5}$

$=\frac{(10\sqrt{2}+5\sqrt{3})-(9\sqrt{2}+6\sqrt{3})}{15}$

$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{15}<0$。

(3) ○：$\log 10^{12}=12$，
$\log 12^{10}=10\cdot\log 12=10\cdot(2\log 2+\log 3)$
$=10\cdot(0.602+0.4771)=10.791$
$\Rightarrow 10^{12}>12^{10}$。

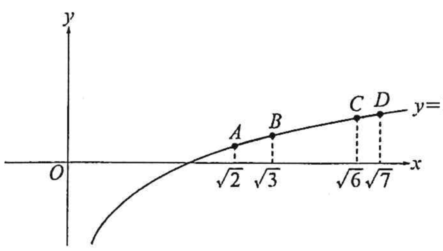
(4) ○：$\sin 2\approx\sin 114°=\sin 66°$，$\sin 1\approx\sin 57°$
$\Rightarrow \sin 2>\sin 1$。

(5) ×：即驗證 $\frac{\log\sqrt{7}-\log\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ 與 $\frac{\log\sqrt{3}-\log\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ 之大小，
因為 $y=\log x$ 圖形遞增但凹口向下，如圖，

$\overleftrightarrow{AB}$ 斜率為 $\frac{\log\sqrt{3}-\log\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$，

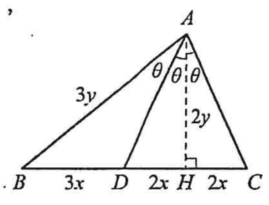
$\overleftrightarrow{CD}$ 斜率為 $\frac{\log\sqrt{7}-\log\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$，

$\Rightarrow \frac{\log\sqrt{7}-\log\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}<\frac{\log\sqrt{3}-\log\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$。



故選(3)(4)。

12. 如圖，令 $\angle DAB=\theta\Rightarrow\angle DAC=2\theta$，
作 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$，因為 $\overline{AD}=\overline{AC}$，
所以 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAH$ 平分線
$\Rightarrow \overline{BD}:\overline{DH}=3:2=\overline{AB}:\overline{AH}$，
令 $\overline{AB}=3y$，$\overline{AH}=2y$，
$\overline{BD}=3x$，$\overline{DH}=2x$



$\Rightarrow (3y)^2=(2y)^2+(5x)^2$，
所以 $5y^2=25x^2\Rightarrow y=\sqrt{5}x$。

(1) ×：$\tan\theta=\frac{x}{y}=\frac{1}{\sqrt{5}}\Rightarrow\theta\neq30°$。

(2) ○：承(1)。

(3) ×：$\overline{AB}:\overline{BC}=3y:7x=3\cdot\sqrt{5}x:7x=3\sqrt{5}:7$。

(4) ○：$\cos(\frac{\pi}{2}+\angle B)=-\sin B=-\frac{2}{3}$。

(5) ×：外接圓半徑比為

$\frac{\overline{AB}}{\sin\angle BDA}:\frac{\overline{AC}}{\sin\angle ADC}=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=3y:2\sqrt{x^2+y^2}=3y:2\sqrt{(\frac{y}{\sqrt{5}})^2+y^2}$

$=3:2\times\sqrt{\frac{6}{5}}=3\sqrt{5}:2\sqrt{6}$。

故選(2)(4)。

三、選填題

13. 由除法原理，設 $x^2f(x)=(2x-1)^2Q_1(x)+(x+5)$，
所以 $x=\frac{1}{2}$ 時，

$(\frac{1}{2})^2f(\frac{1}{2})=(2\cdot\frac{1}{2}-1)^2Q_1(\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}+5)\Rightarrow\frac{1}{4}f(\frac{1}{2})=\frac{11}{2}$，

令 $xf(x)$ 除以 $(2x-1)$ 的餘式為 r，

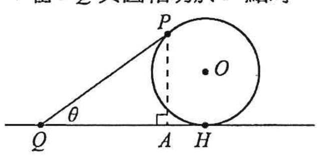
由餘式定理得知：$r=\frac{1}{2}f(\frac{1}{2})=11$。

14. (Ⅰ)設甲、乙、丙所取為□□□
⇒剩下為_△_△_△_△_△_△_△_
從 8 個空隙取 3 個 $\Rightarrow C^8_3=56$。

(Ⅱ)任一組符合的 3 球號碼中，因為甲號碼<乙號碼，
所以由小而大只能甲乙丙、甲丙乙、丙甲乙，
共 3 種。

$\Rightarrow 56\times3=168$。

15. (Ⅰ)令圓 C 與地面相切於 H 點
⇒當 $\overline{PQ}$ 與圓相切於 P 點時，θ 有最大角度。



(Ⅱ)此時令 $O(0,0)$、$H(0,-2)$，
因為 $\overline{QP}=\overline{QH}$，所以 $Q(-4,-2)$，
⇒圓 C：$x^2+y^2=2^2$。

令 $\overleftrightarrow{PQ}$：$y-(-2)=m[x-(-4)]$，
即 $mx-y+4m-2=0$

$\Rightarrow d(O,\overleftrightarrow{PQ})=\frac{|m\cdot0-0+4m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$，

所以 $(4m-2)^2=(2\sqrt{m^2+1})^2$，

$12m^2-16m=0\Rightarrow m=\frac{4}{3}$ 或 0(不合)。

(Ⅲ)過 P 作 $\overline{PA}\perp\overline{QH}$，

因為 $\tan\theta=\frac{4}{3}$，所以 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，

所求 $=\overline{PA}=\overline{PQ}\times\sin\theta=4\times\frac{4}{5}=\frac{16}{5}$。

16. 棋盤有 $8\times8=64$ 格，

一共需要 $1+2+4+\cdots+2^{63}=\dfrac{2^{64}-1}{2-1}=2^{64}-1$ 顆米，

每一個穀倉有 $10^8\times10^8=10^{16}$ 顆米，

所以 $\dfrac{2^{64}-1}{10^{16}}\approx\dfrac{(10^{0.301})^{64}}{10^{16}}=\dfrac{10^{19.264}}{10^{16}}=10^{3.264}=10^{0.264}\times1000$

$\approx1.8365\times1000=1836.5$，

所以至少需要 1837 座穀倉才足夠賞賜。

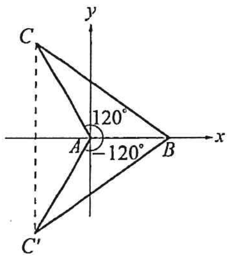
17. 因為 $y=a^x$ 與 $y=\log_a x$ 兩圖形對稱 $y=x$，

所以 A、B 亦對稱 $y=x$

$\Rightarrow\begin{cases}a=2b-2\\b-1=5a-3\end{cases}\Rightarrow a=\dfrac{2}{3}$，$b=\dfrac{4}{3}$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. C 點的 $r=\overline{AC}=4$，



$\triangle ABC$ 在 x 軸上方，

C 點的 θ 為 $360°k+120°$，

$\triangle ABC$ 在 x 軸下方，

C 點的 θ 為 $360°k+(360°-120°)$

$=360°k+240°$，

故 $[4,-\dfrac{2\pi}{3}]$ 是 C 點的極坐標之一，

所有的極坐標 $[4,2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3}]$ 可化成直角坐標的

$$\begin{cases}x=4\cos(2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3})=-2\\y=4\sin(2k\pi\pm\dfrac{2\pi}{3})=\pm2\sqrt{3}\end{cases}，$$

故選(1)(3)(5)。

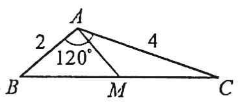
19. <法一>

利用餘弦定理，$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos120°=28$，

所以 $\overline{BC}=2\sqrt{7}$，(1 分)

再用中線定理，$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$，(1 分)

所以 $\overline{AM}^2=\dfrac{2^2+4^2}{2}-\sqrt{7}^2=3$，即 $\overline{AM}=\sqrt{3}$。(3 分)



<法二>

做 C 到 x 軸上的投影點 H，

所以 $\overline{CH}=2\sqrt{3}$，$\overline{AH}=|-2|=2$，(2 分)

在$\triangle HBC$ 中，由三角形兩邊中點連線性質，

$\overline{AM}\,/\!/\,\overline{HC}$ 且 $\overline{AM}=\dfrac{1}{2}\overline{HC}=\sqrt{3}$。(3 分)

20. <法一>

承 19 題，已知 $\overline{CM}=\sqrt{7}$，$\overline{AM}=\sqrt{3}$，$\overline{AC}=4$，

由餘弦定理知

$\cos\angle AMC=-\dfrac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{7})^2-4^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$。(5 分)

<法二>

由補角關係，$\cos\angle AMC=-\cos\angle AMB$，(1 分)

承 19 題，因為 $\overline{AM}\,/\!/\,\overline{HC}$，所以 $\overline{AM}\perp x$ 軸 ($\overline{AB}$)，

故 $\cos\angle AMB=\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，(2 分)

所以 $\cos\angle AMC=-\dfrac{\sqrt{21}}{7}$。(2 分)