數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(2)	(5)	(4)	(3)	(3)	(5)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)(3)(5)	(2)(3)(4)(5)	(1)(3)(5)	(3)(4)	(1)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能運用多項式除法原理與餘式定理求解餘式

解析：$f(x)=(x-2)^{2m+1}-(x-4)^{2n}=(x-3)\,Q(x)+r$

$\Rightarrow r=f(3)=(3-2)^{2m+1}-(3-4)^{2n}=1-1=0$

故選(3)。

2. (2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：能進行有理數化為有限小數與質因數分解的討論

解析：$\dfrac{1}{4}<\dfrac{15}{a}<\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{15}{60}<\dfrac{15}{a}<\dfrac{15}{45}\Rightarrow 45<a<60$

又 $\dfrac{15}{a}$ 可化為有限小數

$\Rightarrow a=2^p\cdot 3^q\cdot 5^r$，其中 $q=0$ 或 1，p、r 為 0 或正整數

可得 $a=48$，50，共 2 個

故選(2)。

3. (5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：數列的分析與累加法應用與根式運算

解析：$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+26}+\sqrt{n+25}}=\sqrt{n+26}-\sqrt{n+25}$，

則 $a_2-a_1=\sqrt{27}-\sqrt{26}$

$a_3-a_2=\sqrt{28}-\sqrt{27}$

$a_4-a_3=\sqrt{29}-\sqrt{28}$

$\vdots$

$+)\ a_{2023}-a_{2022}=\sqrt{2048}-\sqrt{2047}$

$a_{2023}-a_1=\sqrt{2048}-\sqrt{26}$

得 $a_{2023}=\sqrt{2048}=32\sqrt{2}$

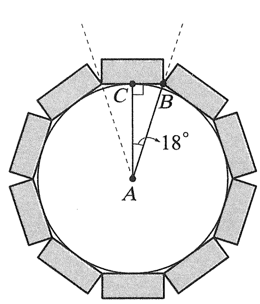
故選(5)。

4. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：能將三角比應用在平面幾何

解析：參考如右圖圓形牆面內之正 10 邊形



$\angle A=\dfrac{360^\circ}{10}\div 2=18^\circ$，

$\overline{BC}=12$ 公分

題目所求內部為正 60 邊形，同理，在直角三角形 $A'B'C'$ 中

$\angle A'=\dfrac{360^\circ}{60}\div 2=3^\circ$，$\overline{B'C'}=\overline{BC}=12$ 公分

假設所求最大圓形的半徑為 $r=\overline{A'C'}$

則 $\tan 3^\circ=\dfrac{12}{r}\Rightarrow r=\dfrac{12}{\tan 3^\circ}$ 公分，故選(4)。

5. (3)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：平面向量與內積應用

解析：$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}=\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}\right)$

$=\dfrac{1}{4}[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB})]$

$=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}-|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB})$

$=\dfrac{1}{4}(-|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2)$

$=\dfrac{1}{4}(-64+36)=-7$

故選(3)。

〈另解〉

$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BO}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD})$

$=\dfrac{1}{4}[(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})]$

$=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+|\overrightarrow{BC}|^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD})$

$=\dfrac{1}{4}[8\cdot 6\cdot\cos(180^\circ-\angle B)+(-|\overrightarrow{AB}|^2)+|\overrightarrow{BC}|^2$

$+6\cdot 8\cdot\cos(180^\circ-\angle C)]$

$=\dfrac{1}{4}(-28-48\cos B+48\cos B)$

$=\dfrac{1}{4}(-28)=-7$

故選(3)。

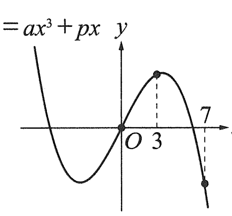
6. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能知道 a、p 正負號與三次函數圖形的關係

解析：由 $f(3)>0$、$f(7)<0$ 可知三次函數的圖形最右邊往下降，且有轉折

對稱點為 $(0,0)$，如右示意圖 $\therefore a<0$，$p>0$



故選(3)。

7. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：能了解多項式運算性質，並且能應用餘式定理與因式定理求解多項式函數值

解析：$\because f(2)=0\Rightarrow(x-2)$ 為 $f(x)$ 的因式

$\because g(1)=-2$

且 $f(1)+g(1)=2\cdot 1^3-4=-2$

得 $f(1)=0\Rightarrow(x-1)$ 為 $f(x)$ 的因式

$\because f(x)+g(x)=2x^3-4\Rightarrow f(x)$ 的三次項為 $2x^3$

故可假設 $f(x)=(2x+k)(x-1)(x-2)$，$k\in\mathbb{R}$

又 $3f(x)+g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 30

$\Rightarrow 3f(-1)+g(-1)=2f(-1)+f(-1)+g(-1)$

$=2f(-1)+2\cdot(-1)^3-4=30$

可得 $f(-1)=18=(k-2)(-2)(-3)\Rightarrow k=5$

$\therefore f(x)=(2x+5)(x-1)(x-2)\Rightarrow f(0)=10$

所求 $g(0)=2\cdot 0^3-4-f(0)$

$=-4-10=-14$

故選(5)。

〈另解〉

$f(2)+g(2)=2\cdot 2^3-4=12$

$\Rightarrow g(2)=12$

$\because 3f(x)+g(x)$ 除以 $(x+1)$ 的餘式為 30

$\therefore 3f(-1)+g(-1)=30$

又 $f(-1)+g(-1)=2\cdot(-1)^3-4=-6$

$\Rightarrow \begin{cases} 3f(-1)+g(-1)=30 \\ f(-1)+g(-1)=-6 \end{cases}$

$\Rightarrow f(-1)=18$，$g(-1)=-24$

設 $g(x)=ax^2+bx+c$

將 $g(1)=-2$，$g(2)=12$，$g(-1)=-24$ 代入

可得 $g(x)=x^2+11x-14$

所求 $g(0)=-14$

故選(5)。

二、多選題

8. (2)(3)(5)

出處：第一冊〈數與式〉、第一冊〈指數、對數〉、第一冊〈多項式函數〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：能計算與判斷指數、對數、三角函數值之正負並運用配方法化簡根式

解析：(1) ╳：$\because x=\sqrt{7}-1\approx 1.646<2$

$\therefore x^2-4=(x-2)(x+2)<0$

(2) ○：$\log\dfrac{3}{x}>\log\dfrac{3}{2}>0$

(3) ○：$\dfrac{1}{3^x}=3^{-x}$

無論 x 的值為何，3^{-x} 恆為正數

(4) ╳：$x=\sqrt{7}-1\Rightarrow(x+1)^2=7$

$\Rightarrow x^2+2x-6=0$

$\Rightarrow -x^2-2x+6=0$

故 $-x^2-2x+5=-1<0$

〈另解〉

將 $x=\sqrt{7}-1$ 代入 $-x^2-2x+5$ 得

$-(\sqrt{7}-1)^2-2(\sqrt{7}-1)+5$

$=-8+2\sqrt{7}-2\sqrt{7}+2+5$

$=-1<0$

(5) ○：$\because x=\sqrt{7}-1\approx 1.646$

$\therefore \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\Rightarrow x$ 為第二象限角

故 $\sin x>0$

故選(2)(3)(5)。

9. (2)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：平均數、標準差、相關係數、迴歸(最適)直線

解析：(1) ╳：$\mu_x=\dfrac{1}{5}(7+14+14+28+42)$

$=21$

(2) ○：$\mu_y=\dfrac{1}{5}(9+12+9+18+27)$

$=15$

(3) ○：$\sigma_x=\sqrt{\dfrac{(7-21)^2+(14-21)^2+(14-21)^2+(28-21)^2+(42-21)^2}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{784}{5}}=\dfrac{28}{\sqrt{5}}\approx 12.52<14$

(4) ○：$\sigma_y=\sqrt{\dfrac{(9-15)^2+(12-15)^2+(9-15)^2+(18-15)^2+(27-15)^2}{5}}$

$=\sqrt{\dfrac{234}{5}}=3\sqrt{\dfrac{26}{5}}$

所以 $r_{xy}=$

$\dfrac{(7-21)(9-15)+(14-21)(12-15)+(14-21)(9-15)+(28-21)(18-15)+(42-21)(27-15)}{5\sigma_x\sigma_y}$

$=\dfrac{420}{5\times\dfrac{28}{\sqrt{5}}\times\dfrac{3\sqrt{26}}{\sqrt{5}}}$

$=\dfrac{420}{28\times 3\sqrt{26}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{26}}$

Y 對 X 的迴歸(最適)直線斜率為

$m=\dfrac{5}{\sqrt{26}}\times\dfrac{\sqrt{\dfrac{234}{5}}}{\sqrt{\dfrac{784}{5}}}$

$=\dfrac{5}{\sqrt{26}}\times\dfrac{\sqrt{234}}{\sqrt{784}}=\dfrac{15}{28}$

$\therefore Y$ 對 X 的迴歸(最適)直線為 $y-15=\dfrac{15}{28}(x-21)$

即 $y=\dfrac{15}{28}x+\dfrac{15}{4}$

(5) ○：令 $x=33$ 代入迴歸(最適)直線可得

$y=\dfrac{15}{28}\times(33-21)+15\approx 21.43>20$

故選(2)(3)(4)(5)。

10. (1)(3)(5)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：能透過題意了解函數的意義，並了解函數的遞增減

解析：(1) ○：$f(0)=\dfrac{L}{1+e^0}\Rightarrow 1=\dfrac{L}{2}\Rightarrow L=2$

(2) ╳：$g(0)=\dfrac{1.5}{1+e^0}+c\Rightarrow 1=\dfrac{1.5}{2}+c\Rightarrow c=\dfrac{1}{4}$

(3) ○：$f(t)=\dfrac{2}{1+e^{-t}}<\dfrac{2}{1}=2$

(4) ╳：$f(1)=\dfrac{2}{1+e^{-1}}\approx 1.460$，

$g(1)=\dfrac{1.5}{1+e^{-2}}+\dfrac{1}{4}\approx 1.566$

故 $f(1)<g(1)$

(5) ○：$g(t)=\dfrac{1.5}{1+e^{-2t}}+\dfrac{1}{4}<\dfrac{1.5}{1}+\dfrac{1}{4}=1.75$，

當 t 值愈大，e^{-t} 會愈小

則 $f(t)$ 的值會愈來愈大

且 $f(2)=\dfrac{2}{1+e^{-2}}\approx 1.754>1.75$

故 $f(12)>g(12)$

故選(1)(3)(5)。

11. (3)(4)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：能化簡絕對值不等式並求出對應解區間之整數值

解析：$|5x-k|\leq 3 \Leftrightarrow \dfrac{k-3}{5}\leq x\leq \dfrac{k+3}{5}$

$\because$ 解集合包含的整數只有 1 與 2

$\therefore 0<\dfrac{k-3}{5}\leq 1$ 且 $2\leq \dfrac{k+3}{5}<3$

$\Rightarrow 3<k\leq 8$ 且 $7\leq k<12$

可得 $7\leq k\leq 8$

故選(3)(4)。

12. (1)(5)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：能了解正弦函數與週期性現象的關係

解析：由題意可知一週期為 24 秒

$\therefore T=3+24n$，n 為非負整數

可簡單取 $T=3$

(1) ○：$3+21=24$，故再經過 21 秒後恰全部熄滅

(2) ╳：$3+113=116$，116 除以 24 餘 20，此時僅有編號 9 至 12 號燈亮著

(3) ╳：$3+2024=2027$，2027 除以 24 餘 11，此時編號 1 至 11 號燈亮著，共 11 個

(4) ╳：在 $3\leq t\leq 9$ 之中的整數 t，當 $7\leq t\leq 9$ 時亮著的燈泡中高度最高的皆為 7 號燈

故所求高度不滿足 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t+\dfrac{4\pi}{3}\right)+5$ 公尺

(5) ○：在 $18\leq t\leq 23$ 之中的整數 t，亮著的燈泡中高度最高的燈泡編號分別為 7 至 12 號，其與地面的距離滿足 $2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}t-\dfrac{\pi}{2}\right)+5$ 公尺

故選(1)(5)。

三、選填題

13. 51

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：分類後再個別求組合數、列舉法

解析：任取 3 數和為偶數，

即是「偶＋偶＋偶」或「偶＋奇＋奇」

則(偶 , 偶 , 偶) $\Rightarrow C^5_3=10$ 種，(偶 , 奇 , 奇) $\Rightarrow C^5_1C^5_2=50$ 種

而其中和小於 310 者有

(100 , 102 , 104)，(100 , 102 , 106)，(100 , 101 , 103)，

(100 , 101 , 105)，(100 , 101 , 107)，(100 , 103 , 105)，

(102 , 101 , 103)，(102 , 101 , 105)，(104 , 101 , 103)

共 9 種

故和不小於 310 的取法共有 $10+50-9=51$ 種。

14. 230

出處：第二冊〈三角比〉

目標：利用輔助線製造相似三角形後，利用基本三角比求邊長

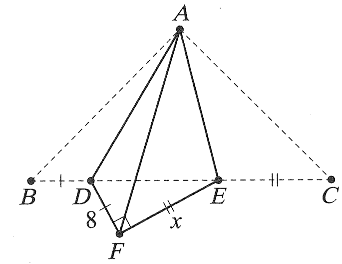
解析：由 $\overline{AB}=\overline{AC}=20\sqrt{2}$，且 $\angle BAC=90^\circ$

可得 $\angle ABC=\angle ACB=45^\circ$

$\because \overline{BC}\times\sin 45^\circ=20\sqrt{2}\Rightarrow \overline{BC}=40$

$\triangle ABC$ 中 $\overline{BC}$ 邊的高為 20

如下圖，令 $\overline{EC}=\overline{EF}=x$



且 $\angle DFE=\angle ABC+\angle ACB=90^\circ$，

$\overline{BD}=\overline{DF}=8$，$\overline{CE}=\overline{EF}=x$

則滿足 $8^2+x^2=(40-8-x)^2$

解得 $x=15$

故四邊形 $ADFE$ 面積

$=\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACE$ 面積

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{BD}\times\overline{AB}\times\sin 45^\circ+\dfrac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{AC}\times\sin 45^\circ$

$=\dfrac{1}{2}(8+15)\times 20\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=230$ 平方單位。

15. 546

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：利用規律與級數運算求值

解析：①正面共有 $(1+2+\cdots\cdots+13)$ 個方塊，

每個方塊有 3 面需要塗色，

所以塗色面積為

$3(1+2+\cdots\cdots+13)=3\times\dfrac{13(1+13)}{2}=273$

②左邊、右邊、底部需要塗色的區塊皆為 $(1+2+\cdots\cdots+13)$ 個正方形面積，

所以塗色面積為 $3(1+2+\cdots\cdots+13)=273$

承①、②，表面需塗色的面積為

$273+273=546$ 平方公分。

16. 256

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：能了解計算機按鍵意義，及數字的位數計算

解析：$1\rightarrow\boxed{2^x}\Rightarrow 2^1=2$，

$2\rightarrow\boxed{\log x}\Rightarrow \log 2$，

$\log 2\rightarrow\boxed{100^x}\Rightarrow 100^{\log 2}=(10^{\log 2})^2=4$，

$4\rightarrow\boxed{2^x}\Rightarrow 2^4=16$，

$16\rightarrow\boxed{\log x}\Rightarrow \log 16$，

$\log 16\rightarrow\boxed{100^x}\Rightarrow 100^{\log 16}=(10^{\log 16})^2=256$

故最後輸出的數字為 256。

17. (1 , 0 , 1 , 4 , 0 , 10 , 0 , 2)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：了解平面向量線性組合的意義

解析：由題意可知 $\overrightarrow{u}=(1,0)$，$\overrightarrow{v}=(1,a_4)$，

$a_5\leq x\leq a_6$，$a_7\leq y\leq a_8$

且希望 P 落在平行四邊形 $OABC$ 內(含邊界)，則顯然

$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8)=(1,0,1,4,0,10,0,2)$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能從直線方程式在圖上的位置判斷出範圍內的整數點

解析：$x=1$ 時，$y=-1$，0，1 ⇒ 3 顆

$x=2$ 時，$y=-3$，-2，……，3 ⇒ 7 顆

$x=3\sim6$ 時，$y=-4$，-3，……，4 ⇒ 9×4 顆

$x=7$ 時，$y=-4$，-3，……，3 ⇒ 8 顆

$x=8$ 時，$y=-4$，-3，……，1 ⇒ 6 顆

$x=9$ 時，$y=-4$，-3，-2，-1 ⇒ 4 顆

共 $3+7+9\times4+8+6+4=64$ 顆

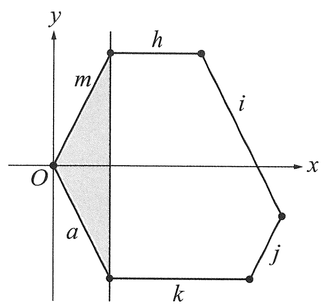
故選(3)。

19. 20000 平方公尺

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能判斷出不等式在坐標平面上的範圍

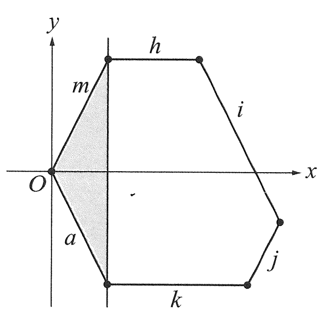
解析：表演區域如下圖所示



故所求面積為 $\frac{1}{2}\times(5+5)\times\frac{5}{2}\times40^2=20000$ 平方公尺。

◎評分原則

表演區域如下圖所示 (1 分)



故所求面積為 $\frac{1}{2}\times(5+5)\times\frac{5}{2}\times40^2=20000$ 平方公尺。 (3 分)

20. 8 分鐘

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能算出兩平行線之間的距離

解析：m 與 j 兩平行線的距離為 $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=10$ 單位長

實際距離為 $10\times40=400$ 公尺

故所求為 $\frac{400}{50}=8$ (分鐘)。

◎評分原則

m 與 j 兩平行線的距離為 $\frac{10\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=10$ 單位長 (3 分)

實際距離為 $10\times40=400$ 公尺

故所求為 $\frac{400}{50}=8$ (分鐘)。 (2 分)