全國公私立高級中學113學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學 B 考科解析

考試日期：113 年 10 月 28~29 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
5	4	5	4	1	1	4	134	12345	125	23	24	9	8	3
14-2	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	15-6	16-1	16-2	17-1	17-2	18	19	20	
1	—	1	5	4	7	4	4	6	2	7	145			

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【知識點】三角比

【解析】

因為 $\triangle ABC \cong \triangle APQ$ 且 $\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{35}{100}=\dfrac{7}{20} \Rightarrow \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{7}{20}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{AQ}}$。

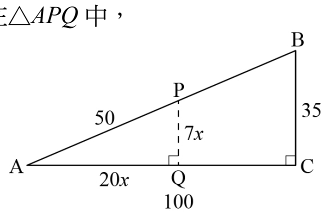
設 $\overline{PQ}=7x$，$\overline{AQ}=20x$，在$\triangle APQ$中，

$(7x)^2+(20x)^2=50^2$

$\Rightarrow x=\dfrac{50}{\sqrt{449}}\approx\dfrac{50}{21}\approx 2.4$，

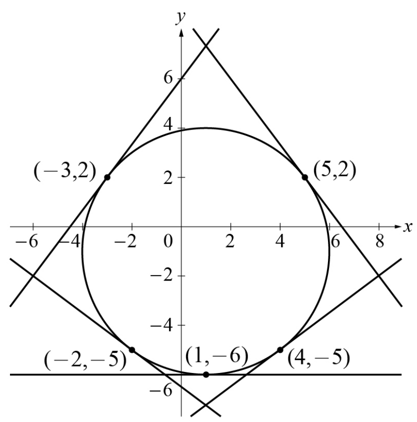
所以高度 $7x\approx 16.8$，

故選(5)。



2. 【知識點】直線與圓

【解析】如下圖，



故選(4)。

3. 【知識點】排列組合與機率

【解析】4 個符號：「■△▲□」的順序不變，

共有 $\dfrac{6!}{4!}$ 種排列方式，

故選(5)。

4. 【知識點】數據分析

【解析】設球員高度為 X (公分)，

調整過後的高度為 Y (公尺)，

滿足 $Y=\dfrac{1}{100}(X+20)$，已知 $\mu_X=176$

$\Rightarrow \mu_Y=\dfrac{1}{100}(176+20)=1.96$，

故選(4)。

5. 【知識點】數據分析

【解析】標準化後的最適合直線斜率為相關係數，

選項(1)的相關係數最小，

故選(1)。

6. 【知識點】多項式函數

【解析】

(Ⅰ) 因為拋物線 $y=a(x+1)^2-3a+6$ 不經過第四象限，

所以開口向上 $\Rightarrow a>0$，

且通過 y 軸上的點 $P(0,-2a+6)$，

所以 $-2a+6\geq 0 \Rightarrow a\leq 3$。

(Ⅱ) 又因為拋物線 $y=a(x+1)^2-3a+6$ 在直線 $y=-ax-11$ 的上方，所以 $a(x+1)^2-3a+6>-ax-11$ 恆成立

$\Rightarrow ax^2+3ax+(-2a+17)>0$ 恆成立

$\Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ (3a)^2-4a(-2a+17)<0 \end{cases} \Rightarrow 0<a<4$

由(Ⅰ)(Ⅱ)結果可知，$0<a\leq 3$，

故選(1)。

7. 【知識點】平面上的比例、三角比

【解析】因為 $OABC$、$OA'B'C'$ 為兩相似矩形，

所以 $\angle OBC=\angle A'OB'=\angle AOB=\theta$

$\Rightarrow \overline{PB}=\overline{OP}=r$，$\angle BPB'=\angle OBC+\angle A'OB'=2\theta$，

$\triangle BPB'$ 中，$\angle B'BP=90°$，所以 $\overline{BB'}=\overline{PB}\tan 2\theta=r\tan 2\theta$，

$\triangle BA'B'$ 中，$\angle B'A'B=90°$

且 $\angle A'BB'=180°-\angle B'BP-\angle OBC=90°-\theta$，

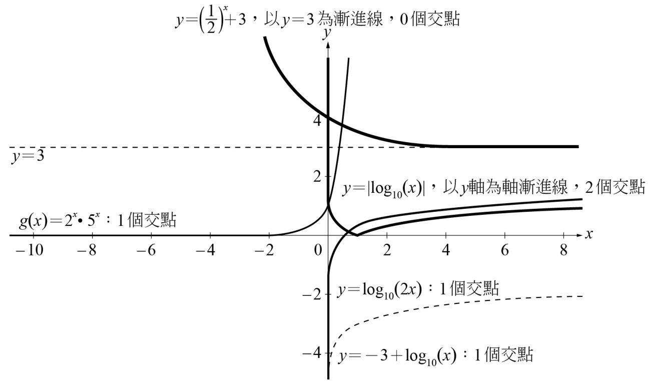
所以 $\overline{A'B'}=\overline{BB'}\sin(90°-\theta)=r\tan 2\theta\cos\theta$，

故選(4)。

二、多選題

8. 【知識點】按比例成長模型

【解析】如圖，



故選(1)(3)(4)。

9. 【知識點】直線與圓、三角比

【解析】

(1) ○：已知 L：$12x+5y+7=0$

$\Rightarrow$ 斜率為 $m_L=\tan\alpha=\dfrac{-12}{5}$。

(2) ○：直線 L 與兩軸圍出的三角形面積

$=\dfrac{1}{2}\times\left|\dfrac{-7}{5}\right|\times\left|\dfrac{-7}{12}\right|=\dfrac{49}{120}$。

x	$\dfrac{-7}{12}$	0
y	0	$\dfrac{-7}{5}$

(3) ○：$d(P,L)=\dfrac{|24-5+7|}{\sqrt{12^2+5^2}}=\dfrac{26}{13}=2$。

(4) ○：$m_M=\dfrac{5}{12}$，因為 $m_L\times m_M=-1\Rightarrow L\perp M\Rightarrow \beta=90°$，

所以 $\sin\beta=\sin 90°=1$。

(5) ○：當直線通過圓心 $C(-1,-2k)$ 時，

交出的弦長最大值為直徑。

以 C 代入直線 L 可得 $-12-10k+7=0\Rightarrow k=\dfrac{-1}{2}$。

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

10. 【知識點】多項式函數

【解析】

(1) ○：以 $P(-1,0)$、$Q(3,0)$ 代入 $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+3$

得 $\begin{cases} a-b=-2 \\ 9a+3b=-30 \end{cases} \Rightarrow a=-3$，$b=-1$

$\Rightarrow a+b=-4$。

(2) ○：函數 $f(x)=x^3-3x^2-x+3$ 圖形對稱中心

x 坐標$=\dfrac{-(-3)}{3\times1}=1$，$y$ 坐標$=f(1)=0$，

所以對稱中心為 $(1,0)$。

(3) ×：因為對稱中心為 $(1,0)$，

所以 $f(1+\sqrt{2024})+f(1-\sqrt{2024})=0$，

即 $f(1-\sqrt{2024})=-f(1+\sqrt{2024})$。

＜另解＞

因為 $f(x)=x^3-3x^2-x+3=(x-1)^3-4(x-1)$

$f(1+\sqrt{2024})=\sqrt{2024}^3-4\sqrt{2024}$，

$f(1-\sqrt{2024})=-\sqrt{2024}^3+4\sqrt{2024}$

$=-f(1+\sqrt{2024})$。

(4) ×：$y=f(x)=(x-2)^3+3(x-2)^2-(x-2)-3$

的一次近似為 $y=-(x-2)-3=-x-1$。

(5) ○：$f(x)=(x-1)^3-4(x-1)$ 向左平移 1 單位後可得

$y=x^3-4x$。

故選(1)(2)(5)。

11. 【知識點】平面上的比例、直線與圓

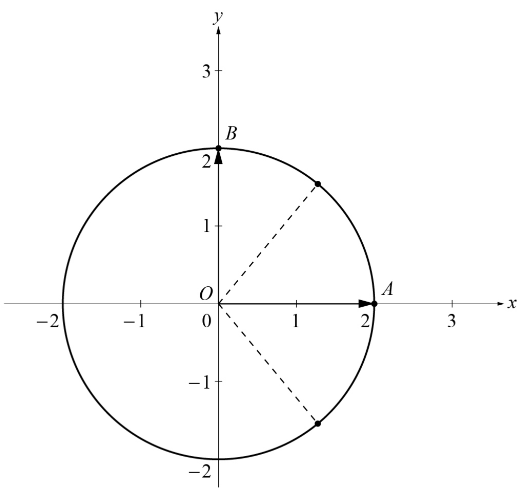
【解析】不失一般性，設 $A(2,0)$，$B(0,2)$，

$\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OC}$ 的夾角為 θ，

因為 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=2\cdot2\cdot\cos\theta>\dfrac{5}{2}\Rightarrow\cos\theta>\dfrac{5}{8}\Rightarrow\sin\theta<\dfrac{\sqrt{39}}{8}$，

所以 $2\cdot2\cdot\cos(90^\circ+\theta)\le\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\le2\cdot2\cdot\cos(90^\circ-\theta)$

$\Rightarrow-4\sin\theta\le\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\le4\sin\theta\Rightarrow|\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|\le4\sin\theta<\dfrac{\sqrt{39}}{2}$，



故選(2)(3)。

12. 【知識點】平面上的比例、實數與指對數

【解析】

(1) ×：$y+(x+y)=20\Rightarrow x+2y=20$。

(2) ○：因為 $B-P-C$ 三點共線，

所以 $\dfrac{3}{5}+t=1\Rightarrow t=\dfrac{2}{5}\Rightarrow\overline{BP}:\overline{CP}=2:3$。

(3) ×：已知 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$，且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，

$$\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}|}:\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\frac{3}{5}|\overrightarrow{AB}|^2}{|\overrightarrow{AB}|}:\frac{\frac{2}{5}|\overrightarrow{AC}|^2}{|\overrightarrow{AC}|}$$

$=\dfrac{3}{5}|\overrightarrow{AB}|:\dfrac{2}{5}|\overrightarrow{AC}|=3x:4y$，

因為 x 與 y 未必相等，所以正射影長比$\ne3:4$。

(4) ○：$\overline{BC}=\sqrt{x^2+(2y)^2}=\sqrt{x^2+(20-x)^2}$

$=\sqrt{2x^2-40x+400}=\sqrt{2(x-10)^2+200}$

$\Rightarrow$ 最小值為 $\sqrt{200}=10\sqrt{2}$。

(5) ×：$\triangle ABP$ 面積$=\dfrac{2}{5}\triangle ABC$ 面積$=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}x\cdot2y=\dfrac{2}{5}xy$，

利用算幾不等式，$\dfrac{x+2y}{2}\ge\sqrt{2xy}$，以 $x+2y=20$ 代入

$\Rightarrow xy\le50\Rightarrow\dfrac{2}{5}xy\le20\Rightarrow$ 最大值為 20。

故選(2)(4)。

三、選填題

13. 【知識點】多項式函數

【解析】$g(x)$ 的所有項之係數和$=g(1)=f(-98)$，

利用綜合除法，可得 $f(-98)=98$。

$$\begin{array}{rrrrrr|l} 1 & +99 & +97 & -98 & -1 & +0 & -98 \\ & -98 & -98 & +98 & +0 & +98 & \\ \hline 1 & +1 & -1 & +0 & -1 & +98 & \end{array}$$

14. 【知識點】數列與級數

【解析】$a_1=2a_1-5\Rightarrow a_1=5$，

當 $n\ge2$，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}\Rightarrow a_n=2a_{n-1}$，

故 $\langle a_n\rangle$ 是首項為 5，公比為 2 的等比數列

$\Rightarrow S_{100}=\dfrac{5(2^{100}-1)}{2-1}=5\cdot(2^{100}-1)\approx5\cdot2^{100}$

$=10^{\log5}\cdot10^{100\log2}\approx10^{30.799}$，

所以 S_{100} 為 31 位數。

15. 【知識點】平面上的比例

【解析】

$\overrightarrow{TF}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{BC}=x\overrightarrow{AB}+y(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

$=(x+\dfrac{1}{2}y)\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}y\overrightarrow{AE}$，

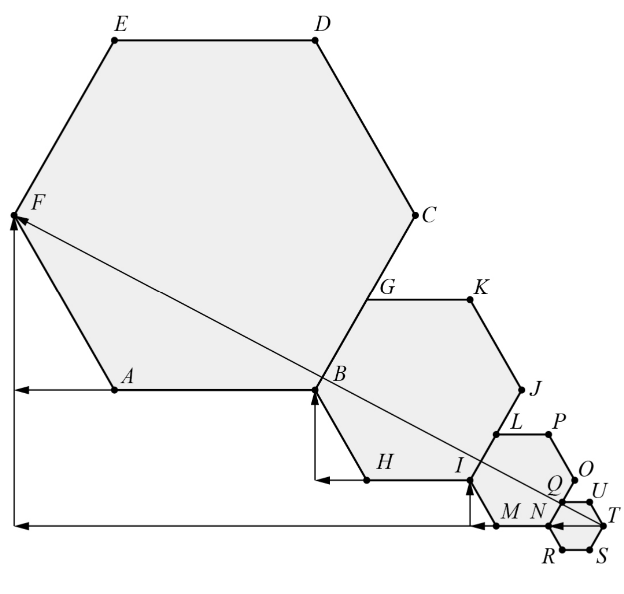
又如圖，

$\overrightarrow{TF}=\dfrac{3}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{NM})+2\overrightarrow{SR}+(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8})\overrightarrow{AE}$

$=-\dfrac{3}{2}(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4})\overrightarrow{AB}-2\cdot\dfrac{1}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{8}\overrightarrow{AE}$

$=-\dfrac{23}{8}\overrightarrow{AB}+\dfrac{7}{8}\overrightarrow{AE}$，

所以 $x+\dfrac{1}{2}y=-\dfrac{23}{8}$ 且 $\dfrac{1}{2}y=\dfrac{7}{8}\Rightarrow(x,y)=(\dfrac{-15}{4},\dfrac{7}{4})$。



16. 【知識點】排列組合與機率

【解析】

購買 B～D 三種票的機率比為 $\frac{1}{50}:\frac{1}{75}:\frac{1}{100}=6:4:3$，

所求$=0\%\times\frac{1}{3}+(50\%\times\frac{6}{13}+75\%\times\frac{4}{13}+100\%\times\frac{3}{13})\times\frac{2}{3}$

$=\frac{1800}{39}\%=\frac{600}{13}\%\approx 46\%$。

17. 【知識點】排列組合與機率

【解析】

設六位數為 $abcdef$，則 $|(b+d+f)-(a+c+e)|=25$。

① $b+d+f=27$，$a+c+e=2$

$\Rightarrow(b,d,f)=(9,9,9)$,

$(a,c,e)=(2,0,0)\vee(1,1,0)\vee(1,0,1)$，

共 $1\times3=3$ 組。

② $a+c+e=27$，$b+d+f=2$

$\Rightarrow(a,c,e)=(9,9,9)$,

$(b,d,f)=(2,0,0)\vee(0,2,0)\vee(0,0,2)\vee$

$(1,1,0)\vee(1,0,1)\vee(0,1,1)$，

共 $1\times6=6$ 組。

③ $b+d+f=26$，$a+c+e=1$

$\Rightarrow(b,d,f)=(9,9,8)\vee(9,8,9)\vee(8,9,9)$,

$(a,c,e)=(1,0,0)$，

共 $3\times1=3$ 組。

④ $a+c+e=26$，$b+d+f=1$

$\Rightarrow(a,c,e)=(9,9,8)\vee(9,8,9)\vee(8,9,9)$,

$(b,d,f)=(1,0,0)\vee(0,1,0)\vee(0,0,1)$，

共 $3\times3=9$ 組。

⑤ $b+d+f=25$，$a+c+e=0$，但 $a\neq0$，共 0 組。

⑥ $a+c+e=25$，$b+d+f=0$

$\Rightarrow(a,c,e)=(9,9,7)\vee(9,7,9)\vee(7,9,9)\vee$

$(9,8,8)\vee(8,9,8)\vee(8,8,9)$,

$(b,d,f)=(0,0,0)$，

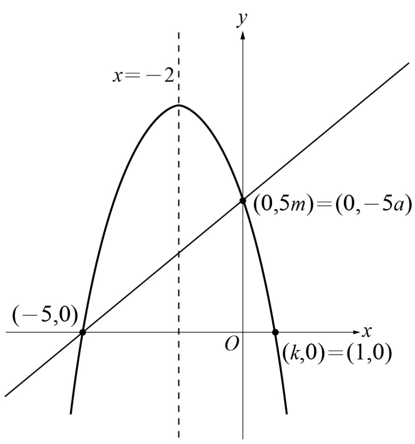
共 $6\times1=6$ 組。

由①～⑥可知：共 $3+6+3+9+0+6=27$ 個六位正整數。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【知識點】多項式函數

【解析】依題意將圖置於坐標平面上如下圖，



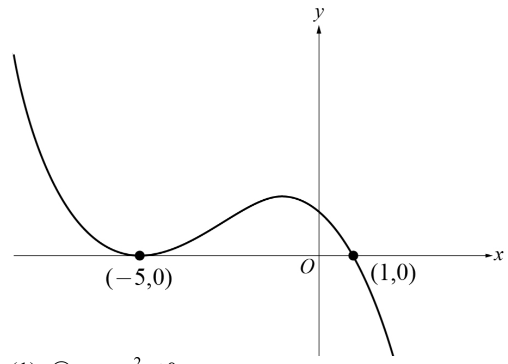
其中因 Γ 的對稱軸為 $x=-2\Rightarrow k=1$，

又 $5m=-5a\Rightarrow m=-a$，

所以 $f(x)=a(x+5)(x-1)$，$a<0$

$g(x)=-a(x+5)$，$a<0$

$h(x)=-a^2(x+5)^2(x-1)$，$a<0$，其圖形如下：



(1) ○：$-a^2<0$。

(2) ×：只有 1 個實根。

(3) ×：$y=h(x)$ 的圖形與 $y=amx^3$ 的圖形特徵不同，
故無法經適當平移得之。

(4) ○：$h(x)=-a^2(x+5)^2(x-1)$

$=-a^2(x^3+9x^2+15x-25)$，

故對稱中心的 x 坐標為 $-\frac{9}{3\cdot1}=-3<-2$。

(5) ○：餘式為 $2h(-1)=256\Rightarrow-2a^2\times16\times(-2)=256$

$\Rightarrow a^2=4$，但 $a<0$，所以 $a=-2$。

故選(1)(4)(5)。

19. 【知識點】多項式函數

【解析】$h(x+1)>0$

$\Rightarrow-a^2(x+6)^2(x)>0$ (1 分)

$\Rightarrow(x+6)^2(x)<0$ (1 分)

$\Rightarrow x<0$ 且 $x\neq-6$。(3 分)

20. 【知識點】多項式函數

【解析】

$h(x)=-a^2(x+5)^2(x-1)$

$=-a^2[(x-1)+6]^2(x-1)$

$=-a^2[(x-1)^2+12(x-1)+36](x-1)$

$=-a^2[(x-1)^3+12(x-1)^2+36(x-1)]$

所以 $y=h(x)$ 在 $x=1$ 時的一次近似圖形為

$-36a^2(x-1)$，(3 分)

又 $-36a^2=\frac{1}{a}\Rightarrow a^3=-\frac{1}{36}$。(2 分)