數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(1)	(5)	(4)	(2)	(3)	(2)	(4)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(4)	(2)(4)	(2)(4)(5)	(1)(2)(5)	(1)(3)(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值不等式的解法

解析：若 $x \geq 1$，去絕對值後 $x-1>x \Rightarrow -1>0$，無解

若 $x<1$，去絕對值後 $-x+1>x \Rightarrow \frac{1}{2}>x$，與 $x<1$ 取交集 $\Rightarrow x<\frac{1}{2}$

$\therefore$解為 $x<\frac{1}{2}$，故選(1)。

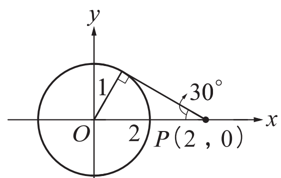
2. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

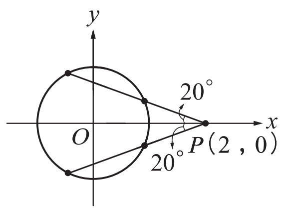
目標：直線與圓關係的應用

解析：P 點對圓 C 作切線

切線與 x 軸銳夾角為 30°



$\therefore$使 $\angle MPO=20^\circ$ 的點 M 如下圖所示



共有 4 個，故選(5)。

3. (4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角形面積公式、餘弦定理的綜合應用

解析：觀察到五個選項的三角形均有兩邊長為 3，5

設此兩邊的夾角為 θ，則由三角形面積

$\frac{1}{2}\times3\times5\times\sin\theta$ 可知面積最大者，$\sin\theta$ 最大

$\Rightarrow |\cos\theta|$ 最小

(1) $|\cos\theta|=\left|\frac{3^2+5^2-3^2}{2\times3\times5}\right|=\frac{25}{30}$

(2) $|\cos\theta|=\left|\frac{3^2+5^2-4^2}{2\times3\times5}\right|=\frac{18}{30}$

(3) $|\cos\theta|=\left|\frac{3^2+5^2-5^2}{2\times3\times5}\right|=\frac{9}{30}$

(4) $|\cos\theta|=\left|\frac{3^2+5^2-6^2}{2\times3\times5}\right|=\frac{2}{30}$

(5) $|\cos\theta|=\left|\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}\right|=\frac{15}{30}$

故選(4)。

4. (2)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：能使用指數律化簡指數式

解析：$30\times a^{-8b}=30\times\frac{1}{2} \Rightarrow a^{-8b}=\frac{1}{2}$

設經過 m 分鐘後，容器內的細沙只有開始時的五分之一

$\Rightarrow 30\times a^{-bm}=30\times\frac{1}{5} \Rightarrow a^{-bm}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow (a^{-8b})^{\frac{m}{8}}=\frac{1}{5} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{m}{8}}=\frac{1}{5}$

$\Rightarrow (2^{-1})^{\frac{m}{8}}=5^{-1}$

$\Rightarrow (10^{0.3010})^{-\frac{m}{8}}=10^{-0.6990}$

$\Rightarrow 0.301\times\left(-\frac{m}{8}\right)=-0.699$

$\Rightarrow m=\frac{0.699\times8}{0.301}\approx\frac{0.7\times8}{0.3}\approx18.6$

$\therefore$大約再過 $18.6-8=10.6$ 分鐘

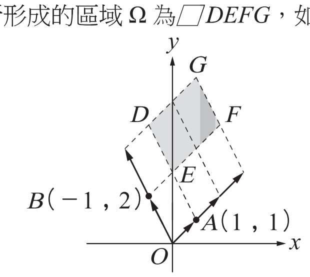
故選(2)。

5. (3)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次聯立不等式圖形判斷、能繪製向量線性組合的圖形

解析：P 點所形成的區域 Ω 為▱$DEFG$，如下圖



其中 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(1,1)+(-1,2)=(0,3)$

$\Rightarrow E(0,3)$

$\overrightarrow{OG}=3\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}=(3,3)+(-2,4)=(1,7)$

$\Rightarrow G(1,7)$

$m_{\overleftrightarrow{EF}}=m_{\overleftrightarrow{DG}}=m_{\overleftrightarrow{OA}}=\frac{1}{1}=1$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{EF}: y-3=1\times(x-0)$，$\overleftrightarrow{DG}: y-7=1\times(x-1)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{EF}: x-y=-3$，$\overleftrightarrow{DG}: x-y=-6$

$m_{\overleftrightarrow{DE}}=m_{\overleftrightarrow{GF}}=m_{\overleftrightarrow{OB}}=\frac{2}{-1}=-2$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{DE}: y-3=-2(x-0)$，$\overleftrightarrow{FG}: y-7=-2(x-1)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{DE}: 2x+y=3$，$\overleftrightarrow{FG}: 2x+y=9$

$\therefore$區域 Ω：$\begin{cases}-6\leq x-y\leq-3\\3\leq2x+y\leq9\end{cases}$

故選(3)。

6. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率的求法

解析：在相遇前：

出現正面時，兩者的 x 坐標相差縮減 2；

出現反面時，兩者的 y 坐標相差縮減 2。

一開始時兩者的 x、y 坐標均相差 6，

所以 A，B 相遇表示共擲 6 次硬幣，

出現 3 次正面及 3 次反面，因此相遇的機率為

$\dfrac{C_3^6C_3^3}{2^6}=\dfrac{20}{64}=\dfrac{5}{16}$，故選(2)。

7. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能分類討論排列問題

解析：先考慮三位數 abc＞三位數 def，如下表

前 3 位 abc	後 3 位 def	個數
6××	3×× 2×× 1××	4!×3
5××	2×× 1××	4!×2
4××	1××	4!×1

以上共 4!×(3＋2＋1)＝144 個

前 3 位 abc	後 3 位 def	個數
65×	43× 42× 41×	2!×(3＋2＋1) ＝12
63×	42× 41×	
62×	41×	
56×	34× 32× 31×	2!×(3＋2＋1) ＝12
54×	32× 31×	
52×	31×	
46×	25× 23× 21×	2!×(3＋2＋1) ＝12
45×	23× 21×	
43×	21×	
36×	15× 14× 12×	2!×(3＋2＋1) ＝12
35×	14× 12×	
34×	12×	

以上共 12×4＝48 個

三位數 abc＜三位數 def 亦同

∴共有 (144＋48)×2＝384 個，故選(4)。

二、多選題

8. (1)(4)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：科學記號與位數、最高位數字的關係

解析：$x=4.\cdots\cdots\times10^7 \Rightarrow 4\times10^7\leq x<5\times10^7$

$y=5.\cdots\cdots\times10^5 \Rightarrow 5\times10^5\leq y<6\times10^5$

(1) ○：$4\times10^7+5\times10^5\leq x+y<5\times10^7+6\times10^5$

$\Rightarrow 4.05\times10^7\leq x+y<5.06\times10^7$

$\therefore x+y$ 為八位數

(2) ×：承(1)，$x+y$ 的最高位數字為 4 或 5

(3) ×：$4\times10^7\times5\times10^5\leq xy<5\times10^7\times6\times10^5$

$\Rightarrow 2\times10^{13}\leq xy<3\times10^{13}$

$\therefore xy$ 為十四位數

(4) ○：承(3)，xy 的最高位數字為 2

(5) ×：$\dfrac{4\times10^7}{6\times10^5}<\dfrac{x}{y}<\dfrac{5\times10^7}{5\times10^5}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3}\times10^2<\dfrac{x}{y}<10^2$

$\Rightarrow 66.\overline{6}<\dfrac{x}{y}<100$

$\therefore \dfrac{x}{y}$ 的整數部分為二位數

故選(1)(4)。

9. (2)(4)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

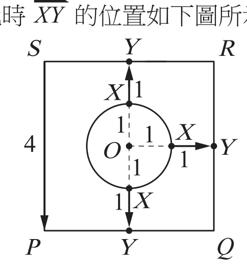
目標：內積的意義與求法

解析：(1) ×：$|\overrightarrow{XY}|$ 的最小值即為圓上的點 X 至正方形上的點 Y 的最小線段長，

因對稱性，僅需觀察圓與 $\overline{PQ}$ 的最短距離，

即為 $d(O,\overline{PQ})$－半徑＝2－1＝1

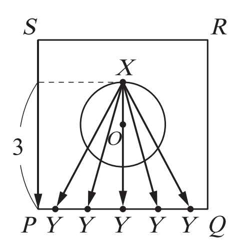
此時 $\overrightarrow{XY}$ 的位置如下圖所示



(2) ○：$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{XY}$

$=\pm|\overrightarrow{SP}|\times$($\overrightarrow{XY}$ 在 $\overrightarrow{SP}$ 上的分量長度)

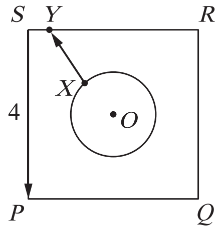
當 $\overrightarrow{XY}$ 如下圖所示時，$\overrightarrow{XY}$ 在 $\overrightarrow{SP}$ 上的分量長度有最大值為 3



$\therefore \overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{XY}$ 的最大值為 4×3＝12

(3) ╳：當 $\overrightarrow{SP}$ 與 $\overrightarrow{XY}$ 夾角為鈍角時，$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{XY}<0$

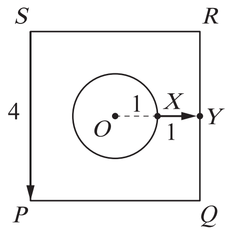
如下圖為一種 $\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{XY}<0$ 的情形



$\therefore$最小值不為 0

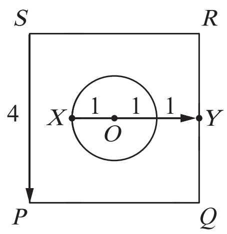
(4) ○：$\overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{XY}=0\Rightarrow\overrightarrow{SP}\perp\overrightarrow{XY}$

當 $\overrightarrow{XY}$ 如下圖所示時，$|\overrightarrow{XY}|$ 有最小值為 1



(5) ╳：承(4)，當 $\overrightarrow{XY}$ 如下圖所示時，

$|\overrightarrow{XY}|$ 有最大值為 3



故選(2)(4)。

10. (2)(4)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第三冊〈按比例成長模型〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：等差、等比的基本概念、對數律的使用、正弦函數的週期性現象

解析：(1) ╳：反例：-6，-1，4，-16

(2) ○：$a+b+c=3b<0\Rightarrow b<0$

設 r 為 b，c，d 之公比

則 $d=b\times r^2<0$

(3) ╳：反例：-3，-2，-1，$-\frac{1}{2}$

(4) ○：設 r 為 b，c，d 之公比

則 $c=br$，$d=br^2$

$\log|b|$

$\log|c|=\log(|b|\cdot|r|)=\log|b|+\log|r|$

$\log|d|=\log(|b|\cdot|r|^2)=\log|b|+2\log|r|$

$\therefore\log|b|$，$\log|c|$，$\log|d|$ 為公差 $\log|r|$ 之等差數列

(5) ○：$\sin\frac{\pi}{2}$，$\sin\frac{3\pi}{2}$，$\sin\frac{5\pi}{2}$

$\Rightarrow 1$，-1，1 為等比數列

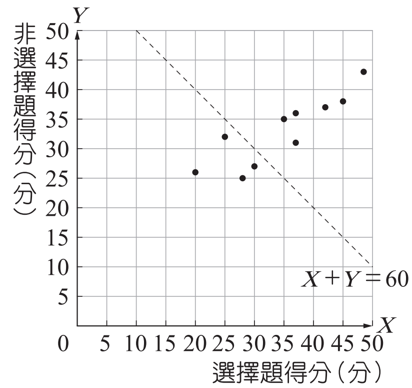
故選(2)(4)(5)。

11. (1)(2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：散布圖的解讀與判斷

解析：已知 $X+Y<60$ 有 5 人，可作下圖

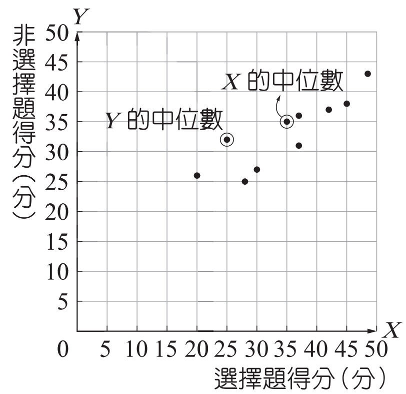


由上圖知總分 $X+Y<60$ 只有 4 個點，

而有 5 人不及格

故表示重疊的點為這 4 個點中的其中一個

(1) ○：由下圖可知 X 的中位數為 35，Y 的中位數大約為 32



$\therefore X$ 的中位數大於 Y 的中位數

(2) ○：觀察圖形可知 X 較分散，Y 較集中

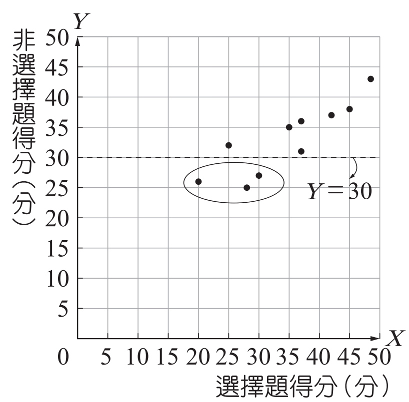
$\Rightarrow\sigma_X>\sigma_Y$

(3) ╳：$m=r\times\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$，$0<r<1$

又由(2)知 $\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}<1$

$\therefore m<1$

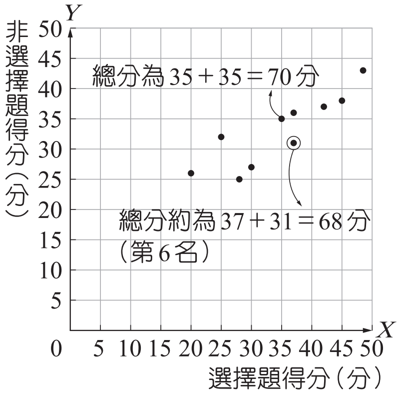
(4) ╳：



可能重疊的點為圖中圈起的三點其中之一

此時就會有 4 位學生的非選擇題得分低於 30 分

(5) ○：



由上圖知，第 6 名的 $X>35$

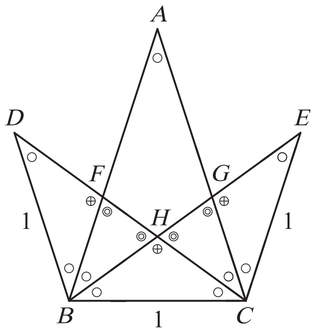
故選(1)(2)(5)。

12. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：能使用三角比表示線段長

解析：



○ 表示 36°

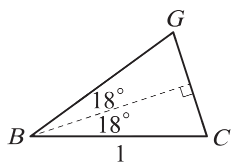
◎ 表示 72°

⊕ 表示 108°

(1) ○：∵△AGB 與 △GBC 均為等腰三角形

∴ $\overline{AG}=\overline{GB}=\overline{BC}=1$

(2) ╳：

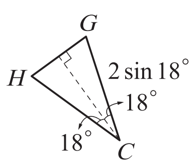


在等腰△BCG 中

$\overline{CG}=\overline{BC}\times\sin 18^\circ\times 2=1\times\sin 18^\circ\times 2$

$=2\sin 18^\circ$

(3) ○：



在等腰△CGH 中

$\overline{GH}=\overline{CG}\times\sin 18^\circ\times 2$

$=2\sin 18^\circ\times\sin 18^\circ\times 2$

$=4\sin^2 18^\circ$

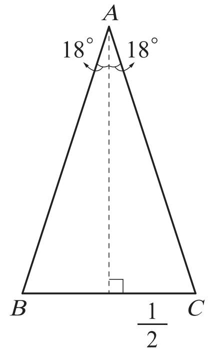
(4) ○：∵△BFD，△BFH，△BHC，△HCG，△CGE

均為等腰三角形

∴ $\overline{DF}=\overline{FB}=\overline{BH}=\overline{HC}=\overline{CG}=\overline{GE}$

$=2\sin 18^\circ$ (由(2)得)

(5) ○：



在等腰△ABC 中

$$\sin 18^\circ=\frac{\frac{1}{2}}{\overline{AC}}\Rightarrow\overline{AC}=\frac{1}{2\sin 18^\circ}$$

故選(1)(3)(4)(5)。

三、選填題

13. $15x-17$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理的基本概念

解析：$(x^5-3x^4-2x^3+7x^2-x-5)(x^2-4x+4)+x^3$

$=(x^5-3x^4-2x^3+7x^2-x-5)〔(x^2-4x+3)+1〕+x^3$

$=(x^5-3x^4-2x^3+7x^2-x-5)(x^2-4x+3)$

$+(x^5-3x^4-2x^3+7x^2-x-5)+x^3$

$=(x^5-3x^4-2x^3+7x^2-x-5)(x^2-4x+3)$

$+(x^5-3x^4-x^3+7x^2-x-5)$

由長除法得餘式為 $15x-17$。

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3+x^2+0x+4 \\
x^2-4x+3 & x^5-3x^4-x^3+7x^2-x-5 \\
 & x^5-4x^4+3x^3 \\ \hline
 & x^4-4x^3+7x^2 \\
 & x^4-4x^3+3x^2 \\ \hline
 & 4x^2-x-5 \\
 & 4x^2-16x+12 \\ \hline
 & 15x-17
\end{array}$$

〔另解〕

設所求餘式為 $ax+b$

則 $(x^5-3x^4-2x^3+7x^2-x-5)(x^2-4x+4)+x^3$

$=(x^2-4x+3)q(x)+ax+b$

$=(x-3)(x-1)q(x)+ax+b$

$x=3$ 代入得 $1\times 1+27=3a+b\Rightarrow 3a+b=28$

$x=1$ 代入得 $(-3)\times 1+1=a+b\Rightarrow a+b=-2$

解聯立得 $a=15$，$b=-17$，故餘式為 $15x-17$。

14. 24

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：百分位數的求法

解析：

得分	0	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9
人數	5	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
累計人數	5	15	24	32	39	45	50	54	57	59	60

$60\times\frac{75}{100}=60\times\frac{3}{4}=45$

故第 75 百分位數為 $\frac{2^4+2^5}{2}=\frac{16+32}{2}=24$ (分)。

15. $\frac{5}{2} \le m \le 4$

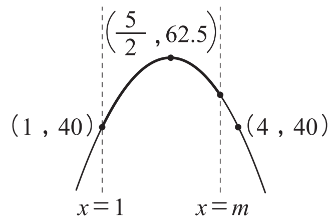
出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數變數有範圍的極值問題

解析：$y=-10x^2+50x$

$$=-10\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{250}{4}=-10\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+62.5$$

又當 $x=1$ 與 $x=4$ 時，$y=40$，可作圖如下



由上圖得知

當 $\frac{5}{2} \le m \le 4$ 時，

y 的最大值為 62.5 十輛／小時＝625 輛／小時，

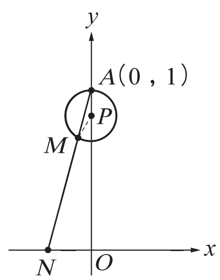
最小值為 40 十輛／小時＝400 輛／小時。

16. $(-2+\sqrt{3}, 0)$

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉、第二冊〈三角比〉

目標：三角比的定義與弧長的綜合應用

解析：設圓心為 P



則 $\angle APM=\dfrac{\frac{5}{12}}{1}\times 360^\circ=150^\circ$

$\Rightarrow \angle MAP=\dfrac{180^\circ-150^\circ}{2}=15^\circ$

在△NAO 中，$\tan 15^\circ=\dfrac{\overline{ON}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{ON}=\tan 15^\circ$

由 $\tan 75^\circ=2+\sqrt{3}$ 可知 $\tan 15^\circ=2-\sqrt{3}$

又 N 點在第二象限，

故 N 點的 x 坐標為 $-\overline{ON}=-2+\sqrt{3}$。

17. 2960

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：生活中期望值問題的求法

解析：3 紅 3 白排成一列，3 紅分開的機率為

$\dfrac{C^4_3}{\frac{6!}{3!3!}}$ ← 3 白排好的 4 個間隔選 3 個放 3 紅

$=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

即以五折、八折價格購買門票入園的機率分別為

$\dfrac{1}{5}$、$\dfrac{4}{5}$

∴折扣的期望值為 $0.5\times\dfrac{1}{5}+0.8\times\dfrac{4}{5}$

$=0.1+0.64=0.74$

故總票價期望值為 $(1200\times 2+1000+600)\times 0.74$

$=2960$ (元)。

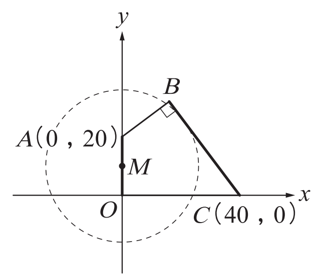
第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓與直線相切的性質應用

解析：以 O 為原點，建立坐標系如下



$m_{\overleftrightarrow{BC}}=-\tan\angle BCO=-\dfrac{4}{3}$

$\overleftrightarrow{BC}$：$y=-\dfrac{4}{3}(x-40)$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BC}$：$4x+3y=160$

M 為 $\overline{OA}$ 中點 $\Rightarrow M(0, 10)$

∵圓與 $\overleftrightarrow{BC}$ 相切

∴半徑 $r=d(M, \overleftrightarrow{BC})=\dfrac{|30-160|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$=\dfrac{130}{5}=26$ (公尺)

故選(4)。

19. 40 公尺

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式的求法

解析：∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

∴ $m_{\overleftrightarrow{AB}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BC}}=-1$

又 $m_{\overleftrightarrow{BC}}=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}}=\dfrac{3}{4}$

得 $\overleftrightarrow{AB}$：$y-20=\dfrac{3}{4}x$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$：$3x-4y=-80$

$\begin{cases}\overleftrightarrow{AB}：3x-4y=-80\\ \overleftrightarrow{BC}：4x+3y=160\end{cases}$

解聯立得 $B(16, 32)$

∴ $\overline{BC}=\sqrt{(40-16)^2+(0-32)^2}=\sqrt{24^2+32^2}$

$=\sqrt{8^2(3^2+4^2)}=8\times 5=40$ (公尺)。

〔另解〕

由 18. 可知 $\overleftrightarrow{BC}$：$4x+3y=160$，

又點 $A(0, 20)$

則 $d(A, \overleftrightarrow{BC})=\dfrac{|60-160|}{\sqrt{4^2+3^2}}=20$

在△AOC 中，$\overline{AC}=\sqrt{20^2+40^2}=\sqrt{2000}$

在△ABC 中，$\overline{BC}=\sqrt{2000-20^2}=40$ (公尺)。

◎評分原則

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore m_{\overleftrightarrow{AB}} \cdot m_{\overleftrightarrow{BC}} = -1$

又 $m_{\overleftrightarrow{BC}} = -\dfrac{4}{3} \Rightarrow m_{\overleftrightarrow{AB}} = \dfrac{3}{4}$ (1 分)

得 $\overleftrightarrow{AB}$ ：$y-20=\dfrac{3}{4}x$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$ ：$3x-4y=-80$ (1 分)

$\begin{cases} \overleftrightarrow{AB}：3x-4y=-80 \\ \overleftrightarrow{BC}：4x+3y=160 \end{cases}$

解聯立得 $B(16, 32)$ (2 分)

$\therefore \overline{BC}=\sqrt{(40-16)^2+(0-32)^2}=\sqrt{24^2+32^2}$

$=\sqrt{8^2(3^2+4^2)}=8\times5=40$ (公尺)。 (1 分)

〔另解〕

由 18. 可知 $\overleftrightarrow{BC}$ ：$4x+3y=160$， (2 分)

又點 $A(0, 20)$

則 $d(A, \overleftrightarrow{BC})=\dfrac{|60-160|}{\sqrt{4^2+3^2}}=20$ (1 分)

在△AOC 中，$\overline{AC}=\sqrt{20^2+40^2}=\sqrt{2000}$ (1 分)

在△ABC 中，$\overline{BC}=\sqrt{2000-20^2}=40$ (公尺)。 (1 分)

20. 7.5 公尺

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：能找出點與圓的最短距離

解析：設 $\overline{OM}=t\ (0\le t\le 20)$，則 $M(0, t)$

所以圓的半徑 $r=d(M, \overleftrightarrow{BC})$

$=\dfrac{|3t-160|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$=\dfrac{160-3t}{5}\ (\because 0\le t\le 20)$

圓與 O 的最短距離為 $r-\overline{OM}=r-t$

圓與 A 的最短距離為 $r-\overline{AM}=r-(20-t)$

依題意可知

$\begin{cases} \dfrac{160-3t}{5}-t\ge 15 \\ \dfrac{160-3t}{5}-(20-t)\ge 15 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 160-3t\ge 75+5t \\ 160-3t\ge 175-5t \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 85\ge 8t \\ 2t\ge 15 \end{cases}$

得 $\dfrac{85}{8}\ge t\ge \dfrac{15}{2}$

$\therefore$ 當 $t=\dfrac{15}{2}=7.5$ 時，半徑 r 有最大值

即 $\overline{OM}$ 為 7.5 公尺時，圓形保護區的面積有最大值。

◎評分原則

設 $\overline{OM}=t\ (0\le t\le 20)$，則 $M(0, t)$

所以圓的半徑 $r=d(M, \overleftrightarrow{BC})$

$=\dfrac{|3t-160|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$=\dfrac{160-3t}{5}\ (\because 0\le t\le 20)$ (1 分)

圓與 O 的最短距離為 $r-\overline{OM}=r-t$

圓與 A 的最短距離為 $r-\overline{AM}=r-(20-t)$

依題意可知

$\begin{cases} \dfrac{160-3t}{5}-t\ge 15 \text{ (1 分)} \\ \dfrac{160-3t}{5}-(20-t)\ge 15 \text{ (1 分)} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 160-3t\ge 75+5t \\ 160-3t\ge 175-5t \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 85\ge 8t \\ 2t\ge 15 \end{cases}$

得 $\dfrac{85}{8}\ge t\ge \dfrac{15}{2}$ (2 分)

$\therefore$ 當 $t=\dfrac{15}{2}=7.5$ 時，半徑 r 有最大值

即 $\overline{OM}$ 為 7.5 公尺時，圓形保護區的面積有最大值。 (2 分)