數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(1)	(4)	(5)	(4)	(3)	(3)
8.	9.	10.	11.	12.		
(3)(4)	(1)(2)(4)(5)	(2)(4)(5)	(1)(3)(4)	(2)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：單點透視法

解析：$\because \overline{AB} \,//\, \overline{CD} \quad \therefore \triangle VAB \sim \triangle VCD$

因此 $\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{VC}}{\overline{VA}}=\dfrac{8+2}{8}=\dfrac{5}{4}$

$\Rightarrow \overline{CD}=\dfrac{5}{4}\times\overline{AB}=\dfrac{5}{4}\times 4=5$，故選(2)。

2. (1)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：週期性現象

解析：可知 5 段舞蹈與 2 次休息為一循環

所需時間為 $\underbrace{2}_{A}+\underbrace{2}_{B}+\underbrace{4}_{C}+\underbrace{5}_{\text{休息}}+\underbrace{3}_{D}+\underbrace{2}_{E}+\underbrace{5}_{\text{休息}}=23$ (分)

$\because$ 早上 8 點到 9 點 10 分共經 70 分，且 $70=3\times 23+1$

$\therefore$ 早上 9 點 10 分時，正在練習 A 段舞蹈，故選(1)。

3. (4)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數圖形的伸縮

解析：可知 $y=f(x)$ 圖形的振幅為 2 $\quad \therefore \overline{AB}=2\times 2=4$ (公分)

又 $y=f(x)$ 圖形的週期為 $\dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}}=10$

因此 $\overline{AD}=10\times 10=100$ (公分)，故選(4)。

4. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：兩垂直直線的斜率關係與二元一次不等式的圖形

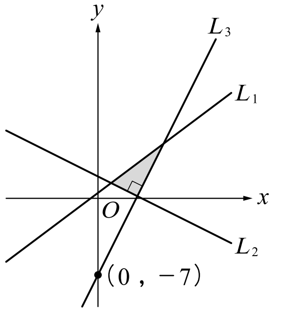
解析：設 $L_1：3x-4y+2=0$，$L_2：x+2y-4=0$，

$L_3：ax-y-7=0$

可知其斜率分別為 $m_{L_1}=\dfrac{3}{4}$，$m_{L_2}=\dfrac{-1}{2}$，$m_{L_3}=a$，

且 L_3 恆過點 $(0,-7)$

$\therefore$ 可得聯立不等式 $\begin{cases}3x-4y+2\geq 0\\ x+2y-4\geq 0\\ ax-y-7\leq 0\end{cases}$ 的區域如下圖



因此 $L_2\perp L_3 \Rightarrow m_{L_2}\times m_{L_3}=-1\Rightarrow m_{L_3}=2$，故選(5)。

5. (4)

出處：第一冊〈數與式〉、第二冊〈三角比〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：算幾不等式、三角形面積公式、弧度量

解析：設 $\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，可知 $b+c=60$

由算幾不等式可得

$\dfrac{b+c}{2}\geq\sqrt{bc}\Rightarrow\dfrac{60}{2}\geq\sqrt{bc}\Rightarrow bc\leq 900$

$\therefore \triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times b\times c\times\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{4}bc\leq\dfrac{1}{4}\times 900=225$

因此當 $b=c$ 時，此塊土地面積有最大值，其最大值為 225 平方公尺，故選(4)。

6. (3)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：餘弦定理與直線的法向量

解析：$\because$ 向量 $(1,-7)$ 為 L_1 的一個法向量

$\therefore$ 假設 $L_1：x-7y+k=0$

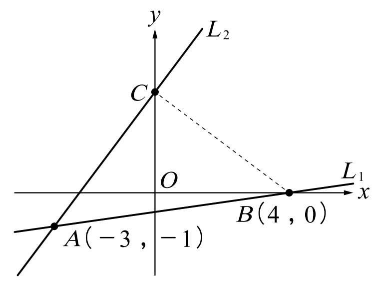
又 L_1 過點 $A(-3,-1)$

因此將 $A(-3,-1)$ 代入 L_1 可得

$-3-7\times(-1)+k=0\Rightarrow k=-4\Rightarrow L_1：x-7y-4=0$

將 $y=0$ 代入 L_1 可得 $x=4\Rightarrow B(4,0)$

$\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{(-3-4)^2+(-1-0)^2}=5\sqrt{2}$，作圖如下



由餘弦定理可得

$\overline{BC}=\sqrt{5^2+(5\sqrt{2})^2-2\times 5\times 5\sqrt{2}\times\cos\dfrac{\pi}{4}}$

$=\sqrt{25+50-50}=5$

故選(3)。

7. (3)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：指數函數的應用與常用對數的性質

解析：設佩萱至少需學習 n 個月

可知 $f(4)=(1-2^{4a})\times 100\%=50\%$

$\Rightarrow 1-2^{4a}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2^{4a}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}\Rightarrow 4a=-1$

$\Rightarrow a=-\dfrac{1}{4} \quad \therefore f(x)=(1-2^{-\frac{x}{4}})\times 100\%$

$f(n)=(1-2^{-\frac{n}{4}})\times 100\%\geq 90\%$

$\Rightarrow 1-2^{-\frac{n}{4}}\geq\dfrac{9}{10}\Rightarrow 2^{-\frac{n}{4}}\leq\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow \log 2^{-\frac{n}{4}}\leq\log\dfrac{1}{10}$

$\Rightarrow -\dfrac{n}{4}\log 2\leq -1$

$\Rightarrow n\geq\dfrac{4}{\log 2}\approx\dfrac{4}{0.3010}\approx 13.3\Rightarrow n=14$

故選(3)。

二、多選題

8. (3)(4)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：常用對數的大小關係

解析：(1)╳：$\because \log\frac{1}{2}<\log 1=0$　$\therefore$不合

(2)╳：$\because \log 1=0$　$\therefore$不合

(3)○：$\because 0=\log 1<\log 2<\log 3<\log 5$

且 $\log 2+\log 3=\log 6>\log 5$

$\therefore \log 2$，$\log 3$，$\log 5$ 可為三邊長

(4)○：$\because 0=\log 1<\log 3<\log 8=\log 2^3=3\log 2$

且 $\log 3+\log 3=\log 9>\log 8=3\log 2$

$\therefore \log 3$，$\log 3$，$3\log 2$ 可為三邊長

(5)╳：$\because \log 3+2\log 2=\log 3+\log 4=\log 12$

$\therefore$不合

故選(3)(4)。

9. (1)(2)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式的除法原理、餘式定理、因式定理

解析：設 $f(x)=(x-3)(x+1)q_1(x)+x+1$，

$g(x)=(x-3)(x+1)q_2(x)+x+1$

(1)○：$\because f(-1)=0$

$\therefore$由因式定理可知 $f(x)$ 可被 $x+1$ 整除

(2)○：$\because f(3)=4$

$\therefore$由餘式定理可知 $f(x)$ 除以 $x-3$ 的餘式為 4

(3)╳：$\because f(1)=-4q_1(1)+2$，$g(1)=-4q_2(1)+2$

$\therefore$由餘式定理可知兩餘式不一定相等

(4)○：
$$\begin{aligned}\because f(x)-g(x)&=((x^2-2x-3)q_1(x)+x+1)\\&\quad-((x^2-2x-3)q_2(x)+x+1)\\&=(x^2-2x-3)(q_1(x)-q_2(x))\end{aligned}$$

$\therefore f(x)-g(x)$ 可被 x^2-2x-3 整除

(5)○：
$$\begin{aligned}&\because f(x)g(x)\\&=((x^2-2x-3)q_1(x)+x+1)\\&\quad\cdot((x^2-2x-3)q_2(x)+x+1)\\&=(x^2-2x-3)^2q_1(x)q_2(x)\\&\quad+(x^2-2x-3)(x+1)q_1(x)\\&\quad+(x^2-2x-3)(x+1)q_2(x)+(x+1)^2\\&=(x^2-2x-3)((x^2-2x-3)q_1(x)q_2(x)\\&\quad+(x+1)q_1(x)+(x+1)q_2(x))+x^2+2x+1\end{aligned}$$

且由長除法可得

$$\begin{array}{r|rrrrr} & & & & & 1\\ \hline x^2-2x-3 & x^2 & + & 2x & + & 1\\ & x^2 & - & 2x & - & 3\\ \hline & & & 4x & + & 4\end{array}$$

即 x^2+2x+1 除以 x^2-2x-3 的餘式為 $4x+4$

$\therefore f(x)g(x)$ 除以 x^2-2x-3 的餘式為 $4x+4$

故選(1)(2)(4)(5)。

10. (2)(4)(5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：二次函數的配方法與二次函數的圖形

解析：(1)╳：$\because f(0)=4$

$\therefore y=f(x)$ 的圖形與 y 軸的交點為 $(0,4)$，

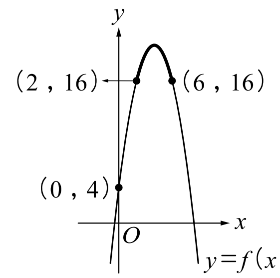
其 y 坐標為 $4<10$

(2)○：$\because$當 $2\le x\le 6$ 時，有兩個相異值 x_1，x_2 使得

$f(x)$ 有最小值 16

$\therefore y=f(x)$ 的圖形為開口向下的拋物線，即 $a<0$

(3)╳：承(1)、(2)可知 $x_1=2$，$x_2=6$，及 $y=f(x)$ 的圖形如下



$\therefore y=f(x)$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點

(4)○：承(3)，設 $f(x)=a(x-2)(x-6)+16$，

可得 $f(0)=12a+16=4$

$\Rightarrow 12a=-12\Rightarrow a=-1$

$\Rightarrow f(x)=-(x-2)(x-6)+16=-x^2+8x+4$

$\therefore b=8$

(5)○：承(4)，由配方法可得

$f(x)=-x^2+8x+4=-(x-4)^2+20$，

即 $f(x)$ 的最大值為 20，故選(2)(4)(5)。

11. (1)(3)(4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：古典機率與期望值

解析：(1)○：$P(\text{太太分得四個})=P(\text{4 正或 4 反})$

$$=\frac{C^4_4+C^4_0}{2^4}=\frac{1}{8}$$

(2)╳：$P(\text{太太未分得})=P(\text{3 正 1 反或 1 正 3 反})$

$$=\frac{C^4_3+C^4_1}{2^4}=\frac{1}{2}$$

(3)○：$E_1=4\times\underbrace{\frac{1}{8}}_{\text{4 正或 4 反}}+2\times\underbrace{\frac{C^4_2}{2^4}}_{\text{2 正 2 反}}=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}=\frac{5}{4}$

(4)○：$E_2=1\times\left(\underbrace{\frac{C^4_2}{2^4}}_{\text{2 正 2 反}}+\underbrace{\frac{C^4_1}{2^4}}_{\text{1 正 3 反}}\right)+3\times\underbrace{\frac{C^4_3}{2^4}}_{\text{3 正 1 反}}$

$=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=\frac{11}{8}$

$E_3=1\times\left(\underbrace{\frac{C^4_2}{2^4}}_{\text{2 正 2 反}}+\underbrace{\frac{C^4_3}{2^4}}_{\text{3 正 1 反}}\right)+3\times\underbrace{\frac{C^4_1}{2^4}}_{\text{1 正 3 反}}$

$=\frac{5}{8}+\frac{3}{4}=\frac{11}{8}$

$\therefore$承(3)可得 $E_1+E_2+E_3=\frac{5}{4}+\frac{11}{8}+\frac{11}{8}=4$

註：$\because$將 4 個杯子蛋糕分給 3 人

$\therefore E_1+E_2+E_3=4$

(5)╳：承(4)可知，$E_2=\frac{11}{8}>1$

故選(1)(3)(4)。

12. (2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：百分位數與標準差的計算，古典機率與期望值

解析：(1) ╳：∵有 5 個選項　∴猜對的機率為 $\frac{1}{5}$

(2) ○：此題單選題得分數的期望值為 $3\times\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$ (分)

(3) ╳：設有 n 人在混合題部分恰得 3 分

可得全班在混合題部分的平均分數為

$\frac{3\times n+15\times 1}{20}=3\Rightarrow 3n=45\Rightarrow n=15$

∴在混合題部分的分數為 0 分的人數為

$20-1-15=4<5$

(4) ╳：設全班在混合題部分的得分數由低至高依序為

x_1，x_2，……，x_{20}，

可知 $x_1=x_2=x_3=x_4=0$，

$x_5=x_6=\cdots\cdots=x_{19}=3$，$x_{20}=15$

$\because 20\times\frac{12}{100}=2.4$

∴第 12 百分位數為 $P_{12}=x_3=0$(分)

(5) ○：承(4)可得，其標準差為

$\sigma=\sqrt{\frac{1}{20}(3^2\times 15+15^2)-3^2}=\sqrt{18-9}=3$ (分)

故選(2)(5)。

三、選填題

13. 7.5

出處：第一冊〈數與式〉

目標：含絕對值的一次不等式

解析：設千雅家、陸義咖啡店、百蓉家分別位於數線上

$A(0)$、$B(x)$、$C(10)$ 三點

可知 $0<x<10$，且 $\frac{|x|}{15}\times 60+\frac{|x-10|}{10}\times 60\leq 45$

$\Rightarrow 4x+6(10-x)\leq 45\Rightarrow 2x\geq 15\Rightarrow x\geq 7.5\Rightarrow 7.5\leq x<10$

故陸義咖啡店與千雅家的距離之最小值為 7.5 公里。

14. $\frac{3}{2}$

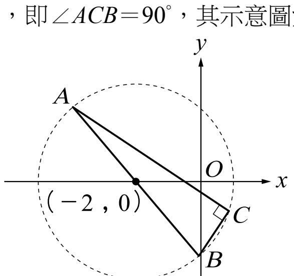
出處：第一冊〈直線與圓〉、第二冊〈三角比〉

目標：圓與直線的關係，直線的斜角

解析：可知圓 Γ 的半徑為 3

∵A，B 為圓 Γ 上兩點，且 $\overline{AB}=6$

∴ $\overline{AB}$ 為直徑，即$\angle ACB=90^\circ$，其示意圖如下



又 $\overleftrightarrow{AC}$ 的斜率為 $m_{\overleftrightarrow{AC}}=\frac{-2}{3}$，

$\overleftrightarrow{BC}$ 的斜率為 $m_{\overleftrightarrow{BC}}=\tan\theta$

因此可得 $\frac{-2}{3}\times\tan\theta=-1\Rightarrow\tan\theta=\frac{3}{2}$ 。

15. 370

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差級數求和公式

解析：設 a_n 為拼出第 n 個圖需用到棉花棒的根數

可知 a_n 為首項 $a_1=10$，公差 $d=6$ 的等差級數

$\therefore a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{10}$

$=\frac{10(2a_1+9d)}{2}$

$=\frac{10(2\times 10+9\times 6)}{2}$

$=370$

故共需 370 根棉花棒。

16. 20

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：有相同物的排列

解析：設 A_1、A_2、A_3 分別代表 A 面牆壁「刨除舊漆」、「批土填補」、「重新上漆」三個程序

且 B_1、B_2、B_3 分別代表 B 面牆壁「刨除舊漆」、「批土填補」、「重新上漆」三個程序

此題可視為設 A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3 作直線排列，且滿足 A_1 在 A_2 的左方，A_2 在 A_3 的左方，B_1 在 B_2 的左方，B_2 在 B_3 的左方

先考慮□□□△△△作直線排列，再將 A_1，A_2，A_3 由左至右填入□內，

同理將 B_1，B_2，B_3 由左至右填入△內，

例如：△□□△□△ $\Rightarrow B_1A_1A_2B_2A_3B_3$

(此為其中一種排列情形)

故所求為 $\frac{6!}{3!3!}=20$ (種)。

17. $4\sqrt{5}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量的幾何表示法與平面向量的內積

解析：$\because\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

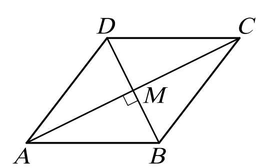
∴四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形

又 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$

因此 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，即四邊形 $ABCD$ 為菱形

設 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 M 點

作圖如下



可知 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$，

且 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$

$\therefore\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2=2\sqrt{5}|\overrightarrow{AC}|$

$\Rightarrow|\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{5}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. ⑷

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：平均數與中位數

解析：∵7 位員工的年齡為 7 個連續偶數，且思瑜的年齡為中位數

∴思瑜的年齡亦為此 7 位員工年齡的平均數

$\mu=\dfrac{196}{7}=28$ (歲)

故選⑷。

19. 5600

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：常用的求和公式

解析：承第 18. 題可知，此 7 位員工的年齡依序為

22，24，26，28，30，32，34

故其平方總和為

$22^2+24^2+26^2+28^2+30^2+32^2+34^2$

$=4(11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2)$

$=4((1^2+2^2+\cdots\cdots+17^2)-(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2))$

$=4\left(\dfrac{17\times18\times35}{6}-\dfrac{10\times11\times21}{6}\right)$

$=4(17\times3\times35-5\times11\times7)=4\times35\times(51-11)$

$=140\times40=5600$。

◎**評分原則**

承第 18. 題可知，此 7 位員工的年齡依序為

22，24，26，28，30，32，34

故其平方總和為

$22^2+24^2+26^2+28^2+30^2+32^2+34^2$ (2 分)

$=4(11^2+12^2+13^2+14^2+15^2+16^2+17^2)$

$=4((1^2+2^2+\cdots\cdots+17^2)-(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2))$

$=4\left(\dfrac{17\times18\times35}{6}-\dfrac{10\times11\times21}{6}\right)$ (2 分)

$=4(17\times3\times35-5\times11\times7)=4\times35\times(51-11)$

$=140\times40=5600$。 (2 分)

20. 4 歲

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：標準差

解析：承第 18.，19. 題可得，此 7 位員工年齡的標準差

$\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{7}(22^2+24^2+26^2+28^2+30^2+32^2+34^2)-28^2}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{7}\times5600-28^2}=\sqrt{800-784}$

$=4$ (歲)。

◎**評分原則**

承第 18.，19. 題可得，此 7 位員工年齡的標準差

$\sigma=\sqrt{\dfrac{1}{7}(22^2+24^2+26^2+28^2+30^2+32^2+34^2)-28^2}$ (2 分)

$=\sqrt{\dfrac{1}{7}\times5600-28^2}=\sqrt{800-784}$

$=4$ (歲)。 (4 分)