全國公私立高級中學114學年度學科能力測驗第三次聯合模擬考試

數學 B 考科解析

考試日期：114 年 10 月 29~30 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	14-1	15-1
2	2	4	2	3	1	234	24	245	14	235	34	9	8	1
15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2	17-3	18	19	20				
8	7	5	0	3	5	0	0	4						

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

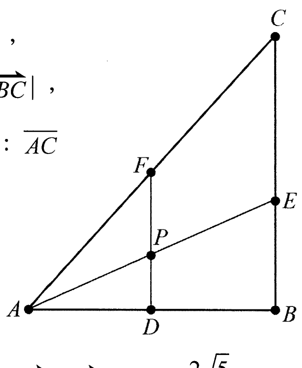
1. 【測驗目標】數列與級數
【解析】令最上層燈數為 a_1，第 n 層為 a_n，
則 $a_n=2a_{n-1}$，$n\geq 2$，故 $\langle a_n\rangle$ 為公比 2 的等比數列，
故級數和 $\dfrac{a_1(2^7-1)}{2-1}=381$，可得 $a_1=\dfrac{381}{127}=3$，
故選(2)。

2. 【測驗目標】除法定理與三次多項式對稱中心
【解析】
設 $f(x)=(x+3)^3Q(x)+(-2x-5)$
（由除法定理，因 $Q(x)$ 為常數，假設為 a）
$=a(x+3)^3-2(x+3)+1$
（化簡為三次式為 $a(x-h)^3-p(x-h)+k$ 格式）
$\Rightarrow$ 對稱中心 $(h,k)=(-3,1)$
故選(2)。

3. 【測驗目標】百分比報酬與比較
【解析】分別計算四天後股價變化：
A 股：$100\times0.9\times0.91\times1.09\times1.1\approx98.20$
B 股：$100\times0.9\times0.92\times1.08\times1.1\approx98.37$（跌最少）
C 股：$100\times0.9\times0.9\times1.1\times1.1\approx98.01$（跌最多）
故選(4)。

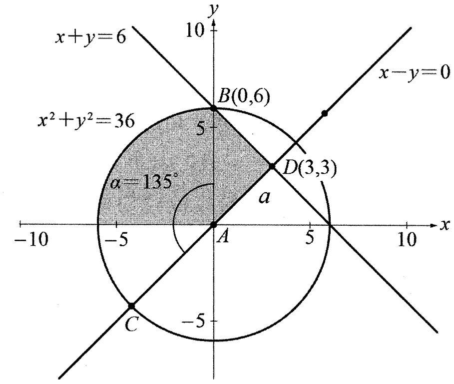
4. 【測驗目標】數據標準化後迴歸直線的變化
【解析】因為標準化後數據 X,Y 之平均數 $\mu_X=\mu_Y=0$，
得新的迴歸直線必通過原點，因此選項(4)(5)不合。
又因標準化後數據之迴歸直線的斜率為相關係數 r_{XY}，
即為 0.86，明顯選項(1)(3)之迴歸直線的斜率不超過 0.5，
故選(2)。

5. 【測驗目標】內積的運算或運用坐標化求內積
【解析】



因 $\overline{AD}:\overline{DB}=1:1$ 且 $\overline{DF}\,//\,\overline{BC}$，
所以 $|\overrightarrow{DP}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BE}|$，$|\overrightarrow{DF}|=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$，
又 $\overline{DP}:\overline{PF}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{AB}:\overline{AC}$
$=2:3$，
且 $|\overrightarrow{BC}|=2\sqrt{5}$
$\Rightarrow|\overrightarrow{DP}|=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，$|\overrightarrow{DF}|=\sqrt{5}$，
綜合以上，
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DF}=|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{AP}|\cos\angle APD=|\overrightarrow{DF}||\overrightarrow{DP}|=\sqrt{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=2$，
故選(3)。
＜另解＞
坐標化如下：$A(0,0)$，$B(4,0)$，$C(4,2\sqrt{5})$，
則 $D(2,0)$，$F(2,\sqrt{5})$。
又 $\overline{DP}:\overline{PF}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{AB}:\overline{AC}=2:3$，
得 $P(2,\dfrac{2\sqrt{5}}{5})$，因此 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DF}=(2,\dfrac{2\sqrt{5}}{5})\cdot(0,\sqrt{5})=2$，
故選(3)。

6. 【測驗目標】幾何圖形交集與面積
【解析】$x+y<6$、$x-y<0$、且在 $x^2+y^2\leq36$ 圓內，
幾何圖形：



以原點 A 為中心、半徑 6 的圓，
兩條直線交於 $D(3,3)$ 所形成區域
$=$ 扇形區域 ABC（夾角 $\dfrac{3}{4}\pi$）$+$ 三角形 ABD
$=\dfrac{1}{2}\cdot6^2\cdot\dfrac{3}{4}\pi+\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot3=\dfrac{27}{2}\pi+9$，
故選(1)。

二、多選題

7. 【測驗目標】三次函數的標準式
【解析】
可將 $f(x)=(x-1)^3+6(x-1)^2-5$ 展開得 $f(x)=x^3+3x^2-9x$。
(1) ×：由於 $f(x)=x^3+3x^2-9x=(x^3+3x^2+3x+1)-12x-1$
$=(x+1)^3-12(x+1)+11$，
可知對稱中心在 $(-1,11)$。
(2) ○：由於 $x^3+3x^2-9x=x(x^2+3x-9)$
有三解 $x=0,\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$，可知有三交點。
(3) ○：承上，可知有一整數解 $x=0$。
(4) ○：由於 $f(x)=(x-1)^3+6(x-1)^2-5$，
可知 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 的一次近似直線即為 $y=-5$，
故斜率為 0。
(5) ×：由於 $\dfrac{(-3+2t)+(1-2t)}{2}=-1$ 恰為對稱中心之 x 坐標，
由此可知，$\dfrac{f(-3+2t)+f(1-2t)}{2}=11$，
即 $f(-3+2t)+f(1-2t)=22$。
故選(2)(3)(4)。

8. 【測驗目標】排列組合
【解析】
(1) ×：應為 $5\times6^3=1080$ 個。
(2) ○：共有 $5\times5\times4\times3=300$ 個。
(3) ×：若尾數為 0，則首位數有 5 個選擇，
故有 $1\times5\times4\times3=60$ 種。
若尾數為 2 或 4，則首位數有 4 種選擇，
故有 $2\times4\times4\times3=96$ 種。
故一共有 156 個。
(4) ○：相當於從 1, 2, 3, 4, 5 中選出 4 個相異數字，
再由左至右，由小至大的擺放，
故一共有 $C_4^5=5$ 個。

(5) ×：由於 0 不可擺首位，

故「0 在 1 的左邊」的個數為 $C_2^4\times(\frac{4!}{2!}-3!)=36$ 種，

而「0 在 1 的右邊」的個數為 $C_2^4\times\frac{4!}{2!}=72$ 種。

故選(2)(4)。

9. 【測驗目標】等差／等比交錯指數與對數

【解析】

(1) ×：反例 $a_1=-3$，$d=2$，5^{-3} , 5^{-1} 均 <1。

(2) ○：若 $b_1=1$，

則 $\log b_n=\log 1\cdot r^{n-1}=(n-1)\log r\leq 0$（因 $0<r<1$）。

(3) ×： $5^{a_n}=5^{a+(n-1)d}=5^{a_1}\cdot(5^d)^{(n-1)}$ ，

首項 5^a，公比 5^d 的等比數列。

(4) ○：$\log b_n=\log b_1+(n-1)\log r$；

首項 $\log b_1$，公差 $=\log r$ 的等差數列。

(5) ○： $b_n\cdot 5^{a_n}=(b_1\cdot r^{n-1})(5^{a_1}\cdot(5^d)^{(n-1)})=b_1 5^{a_1}\cdot(r\cdot 5^d)^{(n-1)}$ ，

首項 $=b_1 5^{a_1}$ ，公比 $(r\cdot 5^d)$ 的等比數列。

故選(2)(4)(5)。

10. 【測驗目標】指數與對數函數圖

【解析】圖判定可知：$0<a<1<b=c<d$。

(1) ○：因為 (s,t) , (t,s) 對稱於 $y=x$。

(2) ×：$A(0,1)$, $B(1,0)$ 中點非 $(1,1)$。

(3) ×：$f(1)=a^1=a$，可知 $a<1$。

(4) ○：$y=1$ 代入可知 $c<d$，又 $b=c$，故 $b=c<d$。

(5) ×：對稱於 $y=x$，所以 $c=b\neq 1$，故 $bc\neq 1$。

故選(1)(4)。

11. 【測驗目標】圓的軌跡方程式、點與圓的關係

【解析】

(1) ×：可由 $2\overline{PA}=\overline{PB}$ 可得

$2\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$ ，

兩邊平方可得

$4[(x-4)^2+(y-1)^2]=(x-1)^2+(y-7)^2$，

兩邊展開移項整理後可得圓 C 軌跡方程式為

$x^2+y^2-10x+2y+6=0$。

(2) ○：可將圓 C 軌跡方程式整理為 $(x-5)^2+(y+1)^2=20$，

可知圓心在 $(5,-1)$，半徑為 $2\sqrt{5}$ 。

由於 $(3,-2)$ 到圓心距離為 $\sqrt{5}$ ，故在圓內部。

(3) ○：由於圓心 $(5,-1)$ 代入 $x+y-2$ 可得大於 0，

故在直線右側。

(4) ×：由於圓心 $(5,-1)$ 到 $L：x+y-2=0$ 之距離為

$\frac{|5-1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$ 小於半徑，

故可知圓有一部分在直線左側。

(5) ○：由於 A 在圓內部，故 $2\sqrt{5}-\overline{OA}\leq\overline{PA}\leq 2\sqrt{5}+\overline{OA}$ ，

可知 $\sqrt{5}\leq\overline{PA}\leq 3\sqrt{5}$ 。

故選(2)(3)(5)。

12. 【測驗目標】餘弦定理與面積公式

【解析】

(1) ×：由三角形性質知 $2+\frac{x}{2}>x$，得 $x<4$，故不正確。

(2) ×：由三角形性質知 $x+\frac{x}{2}>2$，得 $x>\frac{4}{3}$ ，故不正確。

(3) ○：由餘弦定理知，$x^2+\frac{x^2}{4}-2\times x\times\frac{x}{2}\times\frac{1}{4}=2^2$

$\Rightarrow x=2$。

(4) ○：由海龍公式知，$\triangle ABM$ 面積為

$$\sqrt{(\frac{3x+4}{4})(\frac{3x+4}{4}-x)(\frac{3x+4}{4}-\frac{x}{2})(\frac{3x+4}{4}-2)}$$

$$=\sqrt{\frac{3x+4}{4}\times\frac{-x+4}{4}\times\frac{x+4}{4}\times\frac{3x-4}{4}}$$

$$=\frac{\sqrt{(9x^2-16)(16-x^2)}}{16}\text{。}$$

(5) ×：由(4)知，$\triangle ABC$ 面積為 $\triangle ABM$ 面積的兩倍

$$\Rightarrow \triangle ABC\text{ 面積}=\frac{\sqrt{(9x^2-16)(16-x^2)}}{8}$$

$$=\frac{\sqrt{-9x^4+160x^2-256}}{8}$$

$$=\frac{1}{8}\sqrt{-9(x^2-\frac{80}{9})^2+\frac{4096}{9}}\text{，}$$

故當 $x=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ 時，$\triangle ABC$ 面積有最大值 $\frac{8}{3}$ 。

故選(3)(4)。

三、選填題

13. 【測驗目標】指數與對數函數、科學記號

【解析】依 log 定義轉為指數：$a=10^{3x}$，$b=10^{6y}$

比值：$\frac{a}{b}=10^{3x-6y}=10^{3(x-2y)}$（已知 $x-2y=2.8$ 代入）

$=10^{3\times 2.8}=10^{8.4}$

$=10^{0.4}\times 10^8\approx 2.5\times 10^8$（為科學記號），

故為 9 位數。

14. 【測驗目標】直線對稱性、平面向量的內積

【解析】$G(3,7)$ 對 $x=8$ 鏡射得 $G'(13,7)$，

$A(4,2)$ 對 $x=1$ 鏡射得 $A'(-2,2)$，

解 $A'G'$ 直線方程式 $y-2=\frac{1}{3}(x+2)$

$x=1$ 代入解得碰牆點：$B(1,3)$，

向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,1)$ ，$\overrightarrow{AG}=(-1,5)\Rightarrow$ 內積 $=8$。

15. 【測驗目標】單位圓與極坐標

【解析】由 $\tan\theta=\frac{24}{7}$ ，$\cos\theta=\frac{-7}{25}$ ，$|\cos\theta|=\frac{1}{\overline{OD}}$ ，

$\overline{OD}=\frac{25}{7}$ ，

$\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=\frac{25}{7}-1=\frac{18}{7}$ 。

16. 【測驗目標】弳度制與面積之計算

【解析】由圖可知，勒洛三角形之面積可由三塊圓心角為 60° 的扇形，減去 2 塊正三角形，即面積為

$3(\frac{1}{2}\times 10^2\times\frac{\pi}{3})-2(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2)=50\pi-50\sqrt{3}$ ，

又半徑為 $5\sqrt{2}$ 公分的圓形，面積為 $(5\sqrt{2})^2\pi=50\pi$ ，

故面積差為 $50\sqrt{3}$ 。

17. 【測驗目標】期望值

【解析】每一次取球時，取到每一顆球機率皆為 $\frac{1}{9}$ ，

因此可計算取一顆球的期望值為

$\frac{1}{9}(1+2+5+4+9)\times 10+\frac{1}{9}(2+1+5+3+8)\times 10+\cdots$

$+\frac{1}{9}(9+1+4+8+7)\times 10$，

由於每一顆球在與本身同行或同列時皆會被數到，

因此可知每顆球皆被計算 5 次，也就是取一顆球期望值為

$\frac{1}{9}[5\times(1+2+\cdots+9)]\times 10=250$，

故取兩顆球的獎金期望值為 500。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【測驗目標】直線方程式點斜式

【解析】直線 B_1V 方程式斜率 $=B_1B_3$ 斜率 $=\frac{1}{14}$ ，

點斜式 $y+1=(\frac{1}{14})(x+4)$ 整理後得：$x-14y-10=0$，

B_2 在 y 軸，故 $x=0$ 代入得 $B_2=(0,\frac{-5}{7})$ ，

故選(4)。

19. 【測驗目標】解析幾何二直線聯立

【解析】點斜式 $y-2=(\frac{-1}{7})(x+4)$

整理後得 $\overline{A_1A_3}$ 方程式：$x+7y-10=0$，(1 分)

點斜式 $y+1=(\frac{1}{14})(x+4)$

整理後得 $\overline{B_1B_3}$ 方程式：$x-14y-10=0$，(1 分)

聯立解得：$V(10,0)$。(2 分)

20. 【測驗目標】正弦定理、圓周角及圓方程式

【解析】由 $\angle CA_4D=45°$

C, D 兩點可分別由 $A_1(-4,2)$, $B_1(-4,-1)$ 上下平移 2 單位，可得 $C(-4,4)$, $D(-4,-3)$，所以 $\overline{CD}=7$ ，

正弦定理 $\frac{\overline{CD}}{\sin 45°}=2R$ ，求半徑 $R=\frac{7}{\sqrt{2}}$ 。(2 分)

因為 $\overline{CD}$ 為圓的弦

$\Rightarrow$ 圓心在 $\overline{CD}$ 中垂線 $y=\frac{1}{2}$ 上，

故假設圓心為 $(t,\frac{1}{2})$ ，由 $\overline{OC}=\overline{OD}=R$ ，

$\sqrt{(t+4)^2+(t-\frac{1}{2})^2}=\frac{7}{\sqrt{2}}$ ，

得 $t=-\frac{1}{2}$ 或 $\frac{-15}{2}$ ($t>-4$，不合)，

故圓心 $O=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ，(3 分)

圓方程式：$(x+\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{49}{2}$ ，(2 分)

一般式：$x^2+y^2+x-y-24=0$。(1 分)