數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(2)	(2)	(4)	(1)(3)(5)	(1)(5)	(1)(2)(4)(5)	(1)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：易
出處：第二冊第二章〈排列、組合〉
目標：基本的計數原理
解析：路線只有四種：
甲乙丁丙 $\Rightarrow 2+7+5=14$；
甲丁乙丙 $\Rightarrow 5+7+4=16$；
甲乙丙丁 $\Rightarrow 2+4+5=11$；
甲丙乙丁 $\Rightarrow 3+4+7=14$；
所以最短距離為 11 公里
故選(2)。

2. (2)

難易度：易
出處：第一冊第二章〈多項式函數〉
目標：多項式除法的計算
解析：$f(x)=(x^2+x-1)(x+3)Q(x)+x^2+ax+b$ 除以 x^2+x-1 的餘式為 $-4x+6$，
就相當於 x^2+ax+b 除以 x^2+x-1 的餘式為 $-4x+6$，再利用長除法，
可知 x^2+ax+b 除以 x^2+x-1 的餘式為 $(a-1)x+(b+1)$，所以
$a-1=-4$ 且 $b+1=6$，解得 $a=-3$、$b=5$，因此 $a+b=2$
故選(2)。

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & & & 1 \\
\hline
x^2+x-1 & x^2+ & a & x+ & b \\
 & x^2+ & & x- & 1 \\
\hline
 & & (a-1)x+ & (b+1) & \\
\end{array}
$$

3. (4)

難易度：易
出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉
目標：對數的運算與常用對數的應用
解析：$1\times(1+0.03)^n=1.5 \Rightarrow (1.03)^n=\dfrac{3}{2} \Rightarrow n\times\log 1.03=\log 3-\log 2$
$\Rightarrow 0.0128n=0.4771-0.3010=0.1761 \Rightarrow n=13.757\cdots$
故選(4)。

二、多選題

4. (1)(3)(5)

難易度：中
出處：第二冊第四章〈數據分析〉
目標：一維數據分析與二維數據分析的基本概念
解析：(1) ○：最佳直線斜率是負的傾向，亦即相關係數為負
(2) ╳：標準差定義：$\sigma=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{19}(x_i-\mu_x)^2}{19}}$，又葡萄酒消耗量介於 0 至 10 公升間，因此標準差必須小於 10 公升
(3) ○：同(1)
(4) ╳：由題圖可知 $\sigma_x>\sigma_y$，因此 $a=r\cdot\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}>r$
(5) ○：找葡萄酒消耗量排序後的第 10 筆資料，的確介於 2 至 3 公升之間
故選(1)(3)(5)。

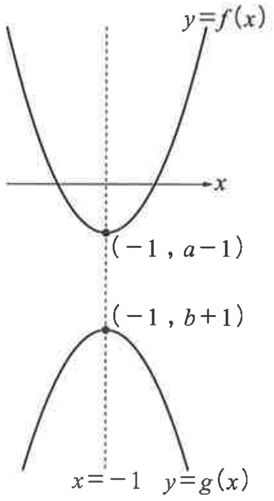
5. (1)(5)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

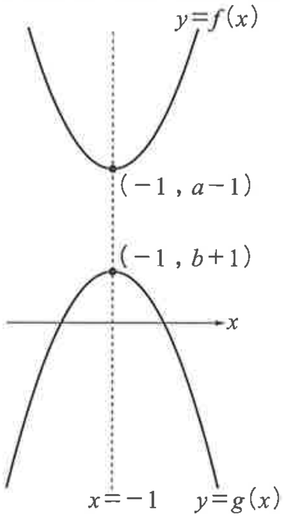
目標：多項式函數的圖形與多項式不等式

解析：因為$f(x)=x^2+2x+a=(x+1)^2+(a-1)$，$g(x)=-x^2-2x+b=-(x+1)^2+(b+1)$，所以$f(x)$與$g(x)$有共同的對稱軸$x=-1$，若函數$y=f(x)g(x)$的圖形與$x$軸恰有兩個相異交點，則有下列三種情形：



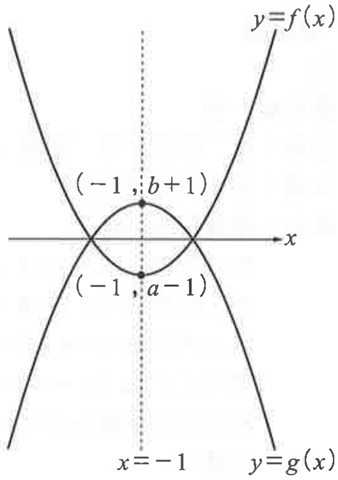
圖(一)

$\begin{cases} a-1<0 \\ b+1<0 \end{cases}$



圖(二)

$\begin{cases} a-1>0 \\ b+1>0 \end{cases}$



圖(三)

$\begin{cases} a-1<0 \\ b+1>0 \\ b+1=-(a-1) \end{cases}$

因此，(1) ○：如圖(一)，$a<1$

(2) ╳：$b=-1$，不合

(3) ╳：如圖(二)，$a>1$時，$b>-1$

(4) ╳：如圖(一)，$a<1$時，$b<-1$

(5) ○：若不等式$f(x)g(x)\leq 0$恆成立，如圖(三)所示，$a+b=0$

故選(1)(5)。

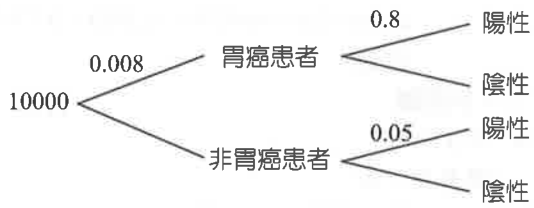
6. (1)(2)(4)(5)

難易度：中偏易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：貝氏定理

解析：(1) ○：$10000\times 0.008=80$



(2) ○：$80\times 0.8=64$

(3) ╳：$(10000-80)\times 0.05=496$

(4) ○：$\dfrac{64}{64+496}=\dfrac{4}{35}$

(5) ○：$\dfrac{80-64}{(80-64)+(10000-80-496)}=\dfrac{1}{590}$

故選(1)(2)(4)(5)。

7. (1)(4)

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量與直線的基本性質

解析：(1)○：直線 OP 與 L 的交點 A，滿足 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 平行

(2)╳：因為直線 OP 與 L 垂直，故滿足 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 垂直的 B 點會落在過 O 的直線 OP 垂直的直線上，但是該線與 L 平行，故 L 上不存在 B 點滿足 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overrightarrow{OB}$ 垂直

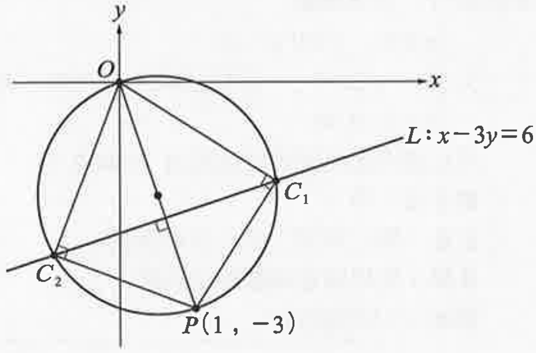
(3)╳：令 $C(3t+6,t)$，因為△OCP 為直角三角形，所以 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CP}=0$

$\Rightarrow (3t+6,t)\cdot(-3t-5,-3-t)=0 \Rightarrow 10t^2+36t+36=0$ 有兩相異實數解

所以在 L 上可以找到兩點 C_1、C_2 滿足△OC_1P、△OC_2P 為直角三角形

〈另解〉

作以 $\overline{OP}$ 為直徑的圓交 L 於兩點 C_1、C_2，故在 L 上可以找到兩點 C_1、C_2 滿足△OC_1P、△OC_2P 為直角三角形



(4)○：P 點到 L 的距離為

$\dfrac{|1+9-6|}{\sqrt{10}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}<2$，

所以在 L 上可以找到兩點，滿足 P 點到此兩點的距離皆等於 2

(5)╳：△EOP 為等腰三角形，

若 $\overline{EO}=\overline{EP}$，$E$ 點會在 $\overline{OP}$ 的中垂線上，

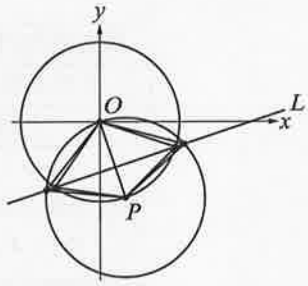
$\overline{OP}$ 的中垂線與 L 平行，故 E 點不存在

若 $\overline{OE}=\overline{OP}$，$E$ 點在以 O 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑的圓上，

E 點為此圓與 L 的交點

若 $\overline{PE}=\overline{PO}$，$E$ 點在以 P 為圓心，$\overline{OP}$ 為半徑的圓上，

E 點為此圓與 L 的交點



故選(1)(4)。

三、選填題

A. 285

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：組合的基本用法

解析：反面計算：

組隊的方法數

＝12 人中選出 4 人的方法數－小華、皓芸兩人都沒有入選的方法數

$=C^{12}_4-C^{10}_4=285$。

〈另解〉

正面計算：

分成只有小華參加、只有皓芸參加、小華與皓芸兩人都參加的情形

組隊的方法數 $=C^{10}_3+C^{10}_3+C^{10}_2=285$。

B. −6

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量內積的定義

解析：$\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\cdot(2\overrightarrow{AC})=\dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

$=\dfrac{2}{3}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle BAC$

$=\dfrac{2}{3}\times6\times3\times\cos120^\circ$

$=-6$。

C. $\frac{32}{81}$

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：基本獨立事件的計算

解析：所求為 $C_1^4\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{3}=\frac{32}{81}$ 。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{cases}x\geq 0，y\geq 0\\3x+y\leq 75\\x+2y\leq 50\end{cases}$ ，目標函數 $P=3000x+4000y$；(2)圖略；(3)當 A 產品生產 20 個單位和 B 產品生產 15 個單位，可以使得產品總售價最高為 120000 元

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：使用線性規劃解決問題

解析：(1)由題意知

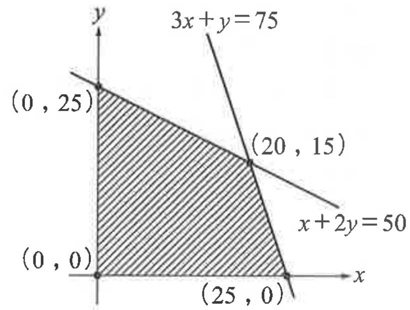
	A	B	限制
電力需求(千瓦‧時)	60	20	≤ 1500
天然氣需求(m^3)	2	4	≤ 100
售價	3000	4000	

所以 $\begin{cases}x\geq 0，y\geq 0\\60x+20y\leq 1500\\2x+4y\leq 100\end{cases}$ ，即 $\begin{cases}x\geq 0，y\geq 0\\3x+y\leq 75\\x+2y\leq 50\end{cases}$ ；

此時目標函數 $P=3000x+4000y$。

(2)求兩直線 $\begin{cases}3x+y=75\\x+2y=50\end{cases}$ 的交點為 $P(20, 15)$，

則不等式組的圖形如右：



(3)考慮 $P=3000x+4000y$，則

(x, y)	$P=3000x+4000y$
(0, 0)	0
(25, 0)	75000
(0, 25)	100000
(20, 15)	120000

所以，當 A 產品生產 20 個單位和 B 產品生產 15 個單位，可以使得產品總售價最高為 120000 元。

二、(1) $\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ ；(2) $p_1=\frac{3}{4}$ ，$p_2=\frac{11}{16}$ ；(3) $\frac{2}{3}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：使用轉移矩陣解決問題

解析：(1)由題意知 $\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}A & B\end{array}\\ \begin{array}{c}A\\B\end{array} & \begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\end{array}$ ，取轉移矩陣為 $\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{2}\\\frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$ 。

(2)令 $M_k=\begin{bmatrix} p_k \\ 1-p_k \end{bmatrix}$，則 $M_0=\begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，

所以 $M_1=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$，即 $p_1=\frac{3}{4}$；

$M_2=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}$，即 $p_2=\frac{11}{16}$。

(3)令 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$，則 $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(1-x)=x \Rightarrow x=\frac{2}{3}$，

所以長時間後穩定時，動點 P 在 A 點的機率為 $\frac{2}{3}$。

非選擇題批改原則

一、(1) $\begin{cases} x\geq 0，y\geq 0 \\ 3x+y\leq 75 \\ x+2y\leq 50 \end{cases}$，目標函數 $P=3000x+4000y$；(2)圖略；(3)當 A 產品生產 20 個單位和 B 產品生產 15 個單位，可以使得產品總售價最高為 120000 元

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：使用線性規劃解決問題

解析：(1)由題意知

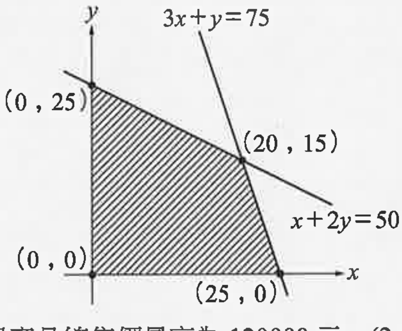
	A	B	限制
電力需求(千瓦・時)	60	20	≤ 1500
天然氣需求(m^3)	2	4	≤ 100
售價	3000	4000	

所以 $\begin{cases} x\geq 0，y\geq 0 \\ 60x+20y\leq 1500 \\ 2x+4y\leq 100 \end{cases}$，即 $\begin{cases} x\geq 0，y\geq 0 \\ 3x+y\leq 75 \\ x+2y\leq 50 \end{cases}$；(3 分)

此時目標函數 $P=3000x+4000y$。(1 分)

(2)求兩直線 $\begin{cases} 3x+y=75 \\ x+2y=50 \end{cases}$ 的交點為 $P(20,15)$，(1 分)

則不等式組的圖形如右：(3 分)



(3)考慮 $P=3000x+4000y$，則

(x,y)	$P=3000x+4000y$
(0 , 0)	0
(25 , 0)	75000
(0 , 25)	100000
(20 , 15)	120000

(3 分)

所以，當 A 產品生產 20 個單位和 B 產品生產 15 個單位，可以使得產品總售價最高為 120000 元。(2 分)

二、(1) $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$；(2) $p_1=\frac{3}{4}$，$p_2=\frac{11}{16}$；(3) $\frac{2}{3}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：使用轉移矩陣解決問題

解析：(1)由題意知 $\begin{array}{c|cc} & A & B \\ A & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ B & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}$，取轉移矩陣為 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$。(4 分)

(2)令 $M_k=\begin{bmatrix} p_k \\ 1-p_k \end{bmatrix}$，則 $M_0=\begin{bmatrix} p_0 \\ 1-p_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，

所以 $M_1=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$，即 $p_1=\frac{3}{4}$；(2 分)

$M_2=\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{11}{16} \\ \frac{5}{16} \end{bmatrix}$，即 $p_2=\frac{11}{16}$。(2 分)

(3)令 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ 1-x \end{bmatrix}$，(2 分)

則 $\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}(1-x)=x \Rightarrow x=\frac{2}{3}$，

所以長時間後穩定時，動點 P 在 A 點的機率為 $\frac{2}{3}$。(3 分)