數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.			
答案	(4)	(3)	(3)	(2)(3)	(1)(4)(5)	(1)(5)			

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：首數與位數的關係

解析：將 $M=9.5$ 代入 $\log E=4.8+1.5M$，

得 $\log E=4.8+1.5\times9.5=19.05=19+0.05$，即首數為 19

因此能量 E 為 20 位數，故選(4)。

2. (3)

難易度：難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數的最大值、最小值問題

解析：$f(x)=ax^2-2ax+b$

$=a(x^2-2x)+b$

$=a(x-1)^2+b-a$

此二次函數圖形的對稱軸為 $x=1$

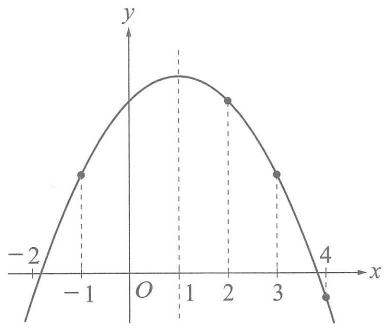
又 $f(3)>0$，$f(4)<0$，故 $a<0$

則在區間 $-1\leq x\leq 2$ 的最大值為 $f(1)=b-a=8$ …………①

最小值為 $f(-1)=b+3a=4$………②

由①、②解得 $a=-1$，$b=7$，則 $2a+b=5$

故選(3)。



3. (3)

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：不盡相異物的排列

解析：4 塊黑色及 4 塊白色的正方形壁磚，任取 6 塊，共有三種情形：

① 4 黑 2 白，② 3 黑 3 白，③ 2 黑 4 白，排列 6 個不同位置

共有 $\dfrac{6!}{4!2!}+\dfrac{6!}{3!3!}+\dfrac{6!}{2!4!}=15+20+15=50$ 種不同的圖案，故選(3)。

二、多選題

4. (2)(3)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：古典機率、條件機率

解析：(1) ╳：3 顆球顏色均相同有兩種情形：3 紅或 3 白

其機率為 $\dfrac{C_3^3+C_3^3}{C_3^8}=\dfrac{1}{28}$

(2) ○：3 顆球顏色均相異有一種情形：1 紅 1 白 1 黑

其機率為 $\dfrac{C_1^3\times C_1^3\times C_1^2}{C_3^8}=\dfrac{9}{28}$

(3) ○：3 顆球顏色共有三種情形：均相同，均相異，恰為兩種顏色

由(1)、(2)可知，其機率為 $1-\dfrac{1}{28}-\dfrac{9}{28}=\dfrac{18}{28}=\dfrac{9}{14}$

(4) ╳：3 顆球中，有紅球也有白球共有三種情形：2 紅 1 白或 1 紅 2 白或 1 紅 1 白 1 黑

其機率為 $\dfrac{C_2^3\times C_1^3+C_1^3\times C_2^3+C_1^3\times C_1^3\times C_1^2}{C_3^8}=\dfrac{9}{14}$

(5) ╳：設 A 為取出的球中有紅球也有白球的事件，B 為取出的球顏色均相異的事件

在 A 事件發生的條件下，B 事件也發生的機率為

$$P(B \mid A)=\frac{\frac{9}{28}}{\frac{9}{14}}=\frac{1}{2}$$

故選(2)(3)。

5. (1)(4)(5)

難易度：難

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：除法原理、餘式定理、勘根定理

解析：由除法原理可知

$f(x)=(x^2-3x)Q(x)+(3x-13)=x(x-3)Q(x)+(3x-13)$，其中 $Q(x)$ 為商式

(1) ○：因為 $f(0)=-13$，故 $f(x)$ 除以 x 的餘式為 -13

(2) ╳：$f(0)=-13<0$，$f(3)=-4<0$，

所以 $f(x)=0$ 在 0 與 3 之間不一定有實根

(3) ╳：$f(0)+0=-13<0$，$f(3)+3=-1<0$，

所以 $f(x)+x=0$ 在 0 與 3 之間不一定有實根

(4) ○：$f(0)+0^2=-13<0$，$f(3)+3^2=5>0$，

所以 $f(x)+x^2=0$ 在 0 與 3 之間必有實根

(5) ○：$f(0)+0^3=-13<0$，$f(3)+3^3=23>0$，

所以 $f(x)+x^3=0$ 在 0 與 3 之間必有實根

故選(1)(4)(5)。

6. (1)(5)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：算術平均數、標準差、相關係數、迴歸直線

解析：設 X 的算術平均數為 μ_X，標準差為 σ_X

Y 的算術平均數為 μ_Y，標準差為 σ_Y

則 $\mu_X=\dfrac{70+72+74+76+78}{5}=74$ (元)，$\mu_Y=\dfrac{5+6+4+2+3}{5}=4$ (千盒)

X	Y	$x_i-\mu_X$	$y_i-\mu_Y$	$(x_i-\mu_X)^2$	$(y_i-\mu_Y)^2$	$(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)$
70	5	-4	1	16	1	-4
72	6	-2	2	4	4	-4
74	4	0	0	0	0	0
76	2	2	-2	4	4	-4
78	3	4	-1	16	1	-4
總和				40	10	-16

(1) ○：$\mu_X=74$ (元)

(2) ╳：$\sigma_Y=\sqrt{\dfrac{10}{5}}=\sqrt{2}>1.4$

(3) ╳：X 與 Y 的相關係數為 $r=\dfrac{-16}{\sqrt{40}\times\sqrt{10}}=\dfrac{-16}{20}=-0.8$

(4) ╳：$\sigma_X=\sqrt{\dfrac{40}{5}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

迴歸直線的斜率 $m=r\cdot\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}=(-0.8)\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-0.4$

故迴歸直線方程式為 $y-4=(-0.4)(x-74)\Rightarrow y=33.6-0.4x$

(5) ○：當售價定為 75 元時，預測市場需求為 $y=33.6-0.4\cdot 75=3.6$ (千盒)

故選(1)(5)。

三、選填題

A. -2

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指數函數的應用

解析：由題意可得 $\dfrac{f(3)}{f(9)}=\dfrac{3\times 2^{-3k}}{3\times 2^{-9k}}=\dfrac{1}{4096}\Rightarrow 2^{6k}=2^{-12}\Rightarrow 6k=-12\Rightarrow k=-2$。

B. $-\dfrac{15}{16}$

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：乘法反矩陣的應用

解析：$\because \det(A)\neq 0$，故 A^{-1} 存在，可得 $A^{-1}A^3=A^{-1}A$，所以 $A^2=I_2$

$$\begin{bmatrix}-4 & k\\ 16 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4 & k\\ 16 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}16+16k & 0\\ 0 & 16k+16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

可得 $16+16k=1\Rightarrow k=-\dfrac{15}{16}$。

C. $\dfrac{1}{4}$

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量的線性組合、面積與二階行列式

解析：$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(2t+4\,,3t+2)$

$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 兩向量所張成的平行四邊形面積為 $\left|\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right|=|12-4|=8=a$，

又 $a=8b$，故 $b=1$

$\triangle OAP$ 的面積為 $b=\dfrac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2t+4 & 3t+2\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}\times|4(3t+2)-2(2t+4)|=\dfrac{1}{2}\times|8t|=1$

$\Rightarrow t=\pm\dfrac{1}{4}$ (負不合)，故 $t=\dfrac{1}{4}$。

D. $\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$

難易度：難

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量內積的應用、面積與二階行列式

解析：假設 $x_1=\alpha$，由 $x_1+x_2=0$ 可得 $x_2=-\alpha$

又 Q、R 兩點在直線 $x+y=0$ 上，故 $y_1=-x_1=-\alpha$，$y_2=-x_2=\alpha$

因此 Q、R 兩點坐標為 $Q(\alpha\,,-\alpha)$、$R(-\alpha\,,\alpha)$

$L_1\perp L_2\Rightarrow\overline{PQ}\perp\overline{PR}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=0$

$\Rightarrow(\alpha-4\,,-\alpha-3)\cdot(-\alpha-4\,,\alpha-3)=0$

$\Rightarrow-(\alpha-4)(\alpha+4)-(\alpha+3)(\alpha-3)=0\Rightarrow\alpha^2=\dfrac{25}{2}$

$\triangle PQR$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times\left|\begin{vmatrix}\alpha-4 & -\alpha-3\\ -\alpha-4 & \alpha-3\end{vmatrix}\right|=\dfrac{1}{2}|(\alpha-4)(\alpha-3)-(\alpha+4)(\alpha+3)|$

$=\dfrac{1}{2}\times|-14\alpha|=7\times|\alpha|=7\times\dfrac{5}{\sqrt{2}}=\dfrac{35}{\sqrt{2}}=\dfrac{35\sqrt{2}}{2}$。

第貳部分：非選擇題

一、(1) $\begin{cases} x，y \geq 0 \\ x+y \geq 5 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 3x+6y \geq 12 \end{cases}$，目標函數為 $P=1250x+1100y$；(2)略；(3)當 $x=2$，$y=3$ 時，可使公司所給付的工資為最少，此時所給付的最少工資為 5800 元

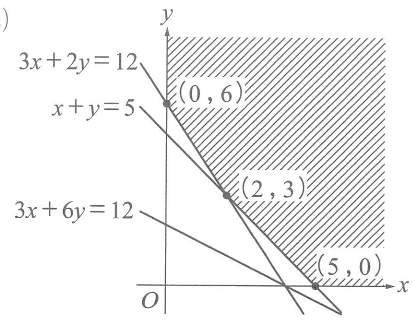
難易度：易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1)線性規劃不等式為 $\begin{cases} x，y \geq 0 \\ x+y \geq 5 \\ 3x+2y \geq 12 \\ 3x+6y \geq 12 \end{cases}$，目標函數為 $P=1250x+1100y$。

(2)



(3)由頂點法得知目標函數 P 的最大值發生在可行解區域的頂點上

(x, y)	$(0, 6)$	$(2, 3)$	$(5, 0)$
$P=1250x+1100y$	6600	5800	6250

故當 $x=2$，$y=3$ 時，可使公司所給付的工資為最少，此時所給付的最少工資為 5800 元。

二、(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$；(2) 300 萬；(3) $\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 55 & 10 \end{bmatrix}$；(4) 11

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣運算及應用

解析：(1)由題意可表示為 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，故 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$。

(2)所求即為 b_3，由(1)可得

$$\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}=P\left(P\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}\right)=P^2\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=P^2\left(P\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}\right)=P^3\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}$$

又 $P^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，

則 $\begin{bmatrix} a_3 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 300 \end{bmatrix}$，可得 $b_3=300$

故經過三次傳播之後 B 病毒的數量為 300 萬。

(3) $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$，$P^2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$P^3=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，……可推出規律 $P^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$

所求 $P+P^2+P^3+\cdots\cdots+P^{10}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}+\cdots\cdots+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 55 & 10 \end{bmatrix}$。

(4)所求即為 b_n，

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=P^n\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 100 \\ 100n \end{bmatrix},$$

經過 n 次傳播後 B 病毒的數量為 $100n$ 萬，由題意 $100n>1000 \Rightarrow n>10$

故 n 的最小值為 11。