

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
3	3	5	4	2	3	2	1345	135	125	24	2345	2	1	6
13-4	14-1	14-2	15-1	15-2	16-1	16-2	16-3	16-4	17-1	17-2	18	19	20	
0	7	4	5	7	3	0	7	2	1	4	4	2		

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. 設 A 代表抽中參加運動類社團(含桌球、籃球、瑜珈社)的學生的事件, B 代表抽中男性學生的事件,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.6 \times 0.5}{0.6 \times 0.5 + 0.4 \times 0.4} = \frac{15}{23}$$

故選(3)。

2. 設 P 點在 xy 平面上的投影點為 $R(4, 3, 0)$,

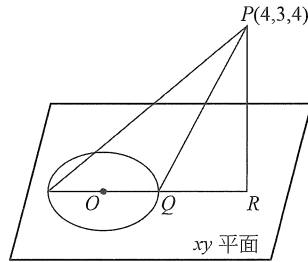
$$\text{則 } \overline{OR} - 1 \leq \overline{OQ} \leq \overline{OR} + 1,$$

$$\text{即 } 4 \leq \overline{OQ} \leq 6$$

$$\Rightarrow \sqrt{4^2 + 4^2} \leq \overline{PQ} \leq \sqrt{4^2 + 6^2},$$

$$\text{所以 } 4\sqrt{2} \leq \overline{PQ}.$$

故選(3)。



3. 討論滿足 $\begin{cases} x+y \leq 7 \\ 4x-3y \geq 0 \end{cases}$ 的 (x, y) ,

x	1	2	3	4	5	6
y	1	1~2	1~4	1~3	1~2	1
(x, y) 組數	1	2	4	3	2	1

$$\text{由上可知所求為 } \frac{1+2+4+3+2+1}{6 \times 6} = \frac{13}{36}$$

故選(5)。

4. 設 X_{n-1} 的長邊為 x 毫米, X_n 的長邊為 y 毫米, 則 X_{n-1} 的短邊為 y 毫米, X_n 的短邊為 $\frac{x}{2}$ 毫米。

$$\text{因為 } \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}}, \text{ 所以 } x^2 = 2y^2.$$

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \langle X_n \text{ 的短邊} \rangle \text{ 恰成等比且公比為 } \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\Rightarrow X_5 \text{ 的長邊長} = X_4 \text{ 的短邊} = 1024 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 512 \text{ (毫米)}.$$

故選(4)。

5. 設碳-14 每過一年其濃度變為原來的 r 倍,

$$n \text{ 年後其濃度降為原來的 } \frac{1}{10},$$

$$\text{因為 } r^{5730} = \frac{1}{2}, \text{ 所以 } \log r = -\frac{\log 2}{5730}.$$

$$\text{又因為 } r^n = \frac{1}{10}, \text{ 所以 } n \log r = -1$$

$$\Rightarrow n = -\frac{1}{\log r} = -\frac{1}{-\frac{\log 2}{5730}} \approx \frac{5730}{0.3010} \approx 19037.$$

故選(2)。

6. 設有 x 格是內藏 10 元獎金、有 y 格是內藏 50 元獎金, 其中 x, y 為 1 至 14 間的自然數, 則有 $(16-x-y)$ 格是內藏 100 元獎金, 因為欲使此遊戲設計公平, 所以獎金的期望值需恰為 45 元。

$$\text{即 } 100 \times \frac{(16-x-y)}{16} + 50 \times \frac{y}{16} + 10 \times \frac{x}{16} = 45$$

$$\Rightarrow 1600 - 100x - 100y + 50y + 10x = 45 \times 16$$

$$\Rightarrow 9x + 5y = 88,$$

又 x, y 為 1 至 14 間的自然數

$$\Rightarrow x=7 \text{ 且 } y=5 \text{ 即有 7 格是內藏 10 元獎金.}$$

故選(3)。

7. 因為 $\triangle AHE \sim \triangle BEF$ 但不全等(因為 $\overline{EF} \neq \overline{EH}$)

所以設 $\overline{AH} = \overline{BE} \times t, \overline{AE} = \overline{BF} \times t$, 其中 $t \neq 1$,

因為 $\triangle AHE \cong \triangle CFG$,

$$\text{所以 } \overline{CF} = \overline{AH} = \overline{BE} \times t,$$

$$\text{又 } \overline{AB} = \overline{BC},$$

$$\text{所以 } \overline{BF} \times t + \overline{BE} = \overline{BF} + \overline{BE} \times t$$

$$\Rightarrow \overline{BE}(1-t) = \overline{BF}(1-t)$$

$$\Rightarrow \overline{BF} = \overline{BE},$$

即 $\triangle BEF$ 為等腰直角三角形

$\Rightarrow \triangle AEH$ 亦為等腰直角三角形。

$$\text{因為 } \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\text{所以 } \overline{AE} = \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \overline{AB}, \overline{BE} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \overline{AB}.$$

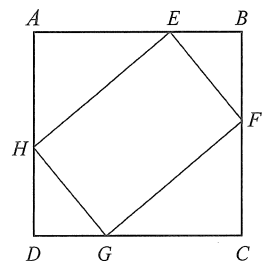
\Rightarrow 黃金矩形視窗面積

$$= \overline{EH} \times \overline{EF} = (\sqrt{2} \times \overline{AE}) \times (\sqrt{2} \times \overline{EB})$$

$$= 2 \times \frac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \times \frac{2}{3+\sqrt{5}} \overline{AB}^2 = 2(\sqrt{5}-2) \times \overline{AB}^2$$

$$\approx 0.47 \times \text{禮盒上方面積}.$$

故選(2)。



二、多選題

8. 因為 $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB = BA$ 。

所以只要選出滿足 $AB = BA$ 之選項即可

$$(1) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$(2) \times : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$(3) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 20 \\ 30 & 44 \end{bmatrix}.$$

$$(4) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$(5) \circ : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 27 & 38 \end{bmatrix}.$$

故選(1)(3)(4)(5)。

9. (1) \circ : 因為 $-1 \leq 2x-3 \leq 1$,

$$\text{所以 } 1 \leq x \leq 2.$$

- (2) \times : 因為 $2^{x^2-3x} \geq 2^{-2}$,

$$\text{所以 } x^2-3x \geq -2 \Rightarrow x \geq 2 \text{ 或 } x \leq 1.$$

- (3) \circ : 因為 $x^2+2 \leq 3x$,

$$\text{所以 } 1 \leq x \leq 2.$$

- (4) \times : $x \leq 2$ 。

- (5) ○：因為 $(x^3-1)(x-2) \leq 0$
 $\Rightarrow (x-1)(x^2+x+1)(x-2) \leq 0$ ，
 又因為 $x^2+x+1 > 0$ 恆成立，
 所以 $(x-1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$ 。
 故選(1)(3)(5)。

10. (1) ○：因為 $\mu_y = \frac{3}{5}\mu_x + 10$ 且 $\mu_x = 50$ ，
 所以 $\mu_y = 40$ 。

- (2) ○：因為 $r_{x,y} \times \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{3}{5}$ ，
 所以 $r_{x,y} \times \frac{10}{5} = \frac{3}{5}$ ， $r_{x,y} = \frac{3}{10}$ 。

- (3) ×：因為 $\begin{cases} y' = y + 20 \\ y'' = \frac{3}{2}y \end{cases}$ ，
 所以 $y'' = \frac{3}{2}(y' - 20) \Rightarrow r_{y',y''} = 1$ 。

- (4) ×：因為 $\begin{cases} y' = y + 20 \\ y'' = \frac{3}{2}y \end{cases}$ ，
 所以 $\sigma_{y'} = \sigma_y = 10$ ， $\sigma_{y''} = \frac{3}{2}\sigma_y = 15$ 。

- (5) ○：因為 $\begin{cases} y' = y + 20 \\ y'' = \frac{3}{2}y \end{cases}$ ，
 所以 $r_{x,y} = r_{x,y'} = r_{x,y''}$ 。
 故選(1)(2)(5)。

11. (1) ×：因為 $y = 40 \sin\left(\frac{\pi}{6} \times 4 + \frac{\pi}{2}\right) + 70 = 40 \sin \frac{7\pi}{6} + 70 = 50$ ，
 4 秒後，P 點離地為 50 公尺。

- (2) ○：因為 $\sin\left(\frac{\pi}{6} \times 6 + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ，
 所以 6 秒後，P 點離地最近。

- (3) ×：P 點離地最高為 $40 \times 1 + 70 = 110$ (公尺)。

- (4) ○：P 點離地最近為 $40 \times (-1) + 70 = 30$ (公尺)。

- (5) ×：因為一週期為 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ 秒，

所以此發電機的葉片轉一圈需 12 秒。

故選(2)(4)。

12. (1) ×：因為 $f(x)$ 除以 $x(x+1)$ 餘 $x+2$ ，
 所以設 $f(x) = x(x+1)g(x) + x+2 \Rightarrow f(-1) = 1$
 $\Rightarrow a-b+c-d = -1$ 。

- (2) ○：因為 $f(x)$ 除以 $(x-1)^2$ 餘 1，
 所以設 $f(x) = (x-1)^2(ax+e) + 1 \Rightarrow f(1) = 1$
 $\Rightarrow a+b+c+d = 1$ 。

- (3) ○：因為 $f(x) = x(x+1)g(x) + x+2$
 $\Rightarrow f(0) = 2$ 且 $f(-1) = 1$ ，
 又 $f(x) = (x-1)^2(ax+e) + 1$ ，

$$\text{所以 } \begin{cases} e=1 \\ 4(-a+e)+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ e=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2(x+1) + 1 = (x^2-1)(x-1) + 1 = x^3 - x^2 - x + 2$$

$\Rightarrow f(x)$ 除以 x^2-1 餘 1。

- (4) ○：因為 $y=f(x)$ 圖形之對稱中心點的 x 坐標為

$$x_0 = -\frac{b}{3a} = \frac{1}{3}$$

- (5) ○：因為 $f(x) = (x-2)^3 + 5(x-2)^2 + 7(x-2) + 4$ ，
 所以 $y=f(x)$ 圖形在 $x=2$ 的一次近似直線為
 $y = 7x - 10$ 。

故選(2)(3)(4)(5)。

三、選填題

13. 因為將六本書任意排有 $6!$ 種排法，
 書架中間隔板可置於第二與第三、第三與第四、第四與第五
 本間的空隙，
 所以共有 $6! \times 3 = 720 \times 3 = 2160$ 種不同排法。

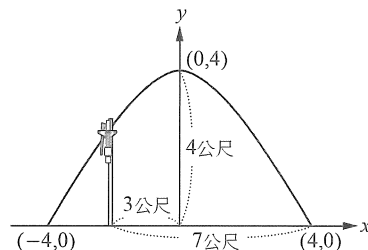
14. 如下圖，取此水柱軌跡為 $y = t(x+4)(x-4)$ ，

將 $(0, 4)$ 代入 $y = t(x+4)(x-4)$ ，可得 $t = -\frac{1}{4}$ ，

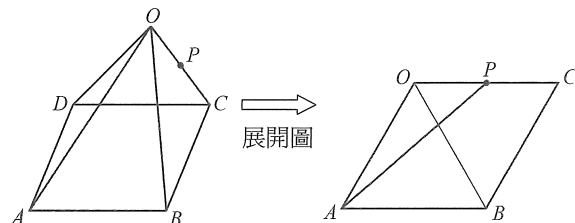
所以水柱軌跡為 $y = -\frac{1}{4}(x+4)(x-4)$ ，

將 $x = -3$ 代入 $y = -\frac{1}{4}(x+4)(x-4)$ ，可得 $y = \frac{7}{4}$ ，

即灑水器的出水口距離地面 $\frac{7}{4}$ 公尺。



- 15.



展開圖中可知

$$\overline{AP} = \sqrt{10^2 + 5^2 - 2 \times 10 \times 5 \cos 120^\circ} = \sqrt{125 + 50} = 5\sqrt{7}$$

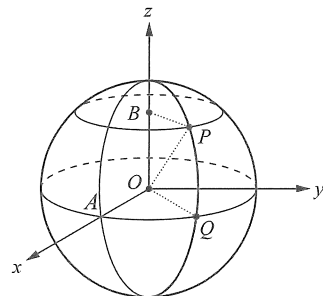
16. 如右圖，

$$\text{因為 } \begin{cases} 6 \cos x^\circ = 3\sqrt{3} \\ 6 \sin x^\circ = 3 \end{cases}$$

所以 $x = 30$ ，

$$\text{又 } 12\pi \times \frac{y}{360} = \frac{12}{5}\pi$$

所以 $y = 72$ 。



17. 因為 $|\vec{u} + 2\vec{v}| = 2$ ，

$$\text{所以 } |\vec{u} + 2\vec{v}|^2 = 4$$

$$|\vec{u}|^2 + 4|\vec{v}|^2 + 4\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -1$$

$$\text{因為 } (\vec{u} + 5\vec{v}) \perp (\vec{u} + t\vec{v})$$

$$\text{所以 } (\vec{u} + 5\vec{v}) \cdot (\vec{u} + t\vec{v}) = 0$$

$$|\vec{u}|^2 + 5t|\vec{v}|^2 + (5+t)\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$4 + 5t - (5+t) = 0, t = \frac{1}{4}$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 設 r 為 $\triangle ABC$ 之內切圓半徑，

$$\text{因為 } \triangle ABC \text{ 面積} = \sqrt{350 \times 200 \times 100 \times 50} = 5000\sqrt{14}$$

$$\text{又 } \triangle ABC \text{ 面積} = r \times 350$$

$$\text{所以 } r = \frac{100}{7}\sqrt{14} \text{ (m)}。 \text{故選(4)。}$$

19. 因為 I 為 $\triangle ABC$ 的內心且 $\overline{AB} = 150$ 、 $\overline{BC} = 250$ 、 $\overline{AC} = 300$ ，

$$\text{所以 } \triangle ABI \text{ 面積} : \triangle BCI \text{ 面積} : \triangle CAI \text{ 面積}$$

$$= \overline{AB} : \overline{BC} : \overline{CA} = 3 : 5 : 6$$

$$\text{又因為 } \overline{AD} : \overline{AB} = 100 : 150 = 2 : 3$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle ADI \text{ 面積} &= \frac{2}{3} \times \triangle ABI \text{ 面積} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{14} \times \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \frac{1}{7} \times \triangle ABC \text{ 面積} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\triangle ADI \text{ 面積}}{\triangle ABC \text{ 面積}} = \frac{1}{7} \approx 0.14,$$

故選(2)。

20. 設 \overline{DI} 交 \overline{AC} 於 E , $\overline{AE} = k \overline{AC}$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow \triangle AEI \text{ 面積} &= k \times \triangle ACI \text{ 面積} = k \times \frac{6}{14} \times \triangle ABC \text{ 面積} \\ &= \frac{3k}{7} \times \triangle ABC \text{ 面積}, (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又因為 } \triangle ADE \text{ 面積} &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \overline{AB} \times k \overline{AC} \times \sin A \\ &= \frac{2}{3} k \times \triangle ABC \text{ 面積}, (2 \text{ 分}) \end{aligned}$$

$$\text{所以 } \overline{EI} : \overline{DE} = \triangle AEI \text{ 面積} : \triangle ADE \text{ 面積} = \frac{3}{7} : \frac{2}{3} = 9 : 14$$

$$\Rightarrow \overline{DI} : \overline{EI} = 5 : 9 (2 \text{ 分})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{陳爺爺需再費時 } 60 \times \frac{9}{5} &= 108 \text{ 秒才能到達步道的另一出入口。} \\ &(2 \text{ 分}) \end{aligned}$$