

110 學年度全國高級中學第四次學科能力測驗數學 B(110-E4)

第壹部分：選擇題(占 85 分)



一、單選題(占 40 分)

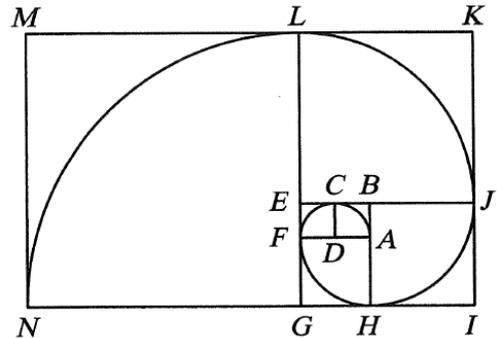
1. 比較下列四數： $a = (\frac{1}{3})^{-3}$ ， $b = (\frac{1}{3})^2$ ， $c = 81^{\frac{1}{3}}$ ， $d = \frac{1}{\sqrt[3]{0.3}}$ 的大小關係為下列哪一個選項？

- (1) $a > b > c > d$ (2) $a > c > b > d$ (3) $a > c > d > b$
 (4) $c > a > d > b$ (5) $c > a > b > d$

2. 已知 t 為實數且 $t \neq 0$ ，若滿足方程式 $|x| + |x-t| = 10$ 的解恰為 α 、 β 且 $\alpha + \beta = 4$ ，其中 α 、 β 均為實數，則 t 的值為下列哪一個選項？

- (1) 4 (2) 5 (3) 6 (4) 7 (5) 8

3. 如右圖所示， $ABCD$ ， $CDFE$ ， $AFGH$ ， $BHIJ$ ， $JKLE$ ， $LMNG$ 皆為正方形且 $ABCD$ 的邊長為 1 公分，有一條螺線是從最小的正方形邊長為半徑畫四分之一弧，同樣的作法一直延伸到右圖中的正方形 $ABCD$ ，則此螺線的長度為下列哪一個選項？



- (1) $9\frac{1}{2}\pi$ 公分 (2) 10π 公分 (3) $10\frac{1}{2}\pi$ 公分
 (4) 11π 公分 (5) 12π 公分

4. 已知函數 $y = f(x) = \log(x+1)$ ， $x_1 > x_2 > x_3 \geq 1$ 且 $a = \frac{x_1}{f(x_1)}$ ， $b = \frac{x_2}{f(x_2)}$ ， $c = \frac{x_3}{f(x_3)}$ ，則

a ， b ， c 的大小關係為下列哪一個選項？

- (1) $a > b > c$ (2) $a > c > b$ (3) $b > a > c$ (4) $b > c > a$ (5) $c > a > b$

5. 2021 年 6 月 2 日衛福部對 2000 位被匡列的國人進行快篩，確認是否患有新冠肺炎，已知患有新冠肺炎的人被驗出陰性的機率為 5%(偽陰性)，未患有新冠肺炎的人被驗出陽性的機率為 1%(偽陽性)，若已推算出在快篩結果為陽性的條件下，確實患有新冠肺炎的機率為 $\frac{5}{6}$ ，則這 2000 位國中患有新冠肺炎的人數為下列哪一個選項？

- (1) 100 人 (2) 200 人 (3) 300 人 (4) 400 人 (5) 500 人

6. 滿足 $0 \leq x - y \leq 2$ ， $0 \leq x + y \leq 14$ 的區域為一個矩形(含邊界) Ω ，此矩形 Ω 的外接圓為 C_1 ，在此矩形 Ω 內(含邊界)的最大圓為 C_2 ，則兩圓的面積和為下列哪一個選項？

- (1) $\frac{\pi}{2}$ (2) 25π (3) 50π (4) $\frac{49\pi}{2}$ (5) $\frac{51\pi}{2}$

7. 古典密碼學主要在研究訊息的保密書寫和傳遞，以及與其相對應的破譯方法。假設在戰爭時，我方知道敵軍在傳遞坐標位置時，是以一個二階方陣 A 作線性變換，且我方攔截到兩次傳遞變換前後的資訊，分別由坐標 $(1,1)$ 、 $(2,3)$ 經過矩陣 A 變換到 $(0,3)$ 、 $(-1,8)$ ，則坐標 $(5,8)$ 經矩陣 A 變換後的坐標為下列哪一個選項？

- (1) $(0,0)$ (2) $(3,21)$ (3) $(3,-21)$ (4) $(-3,21)$ (5) $(-3,-21)$

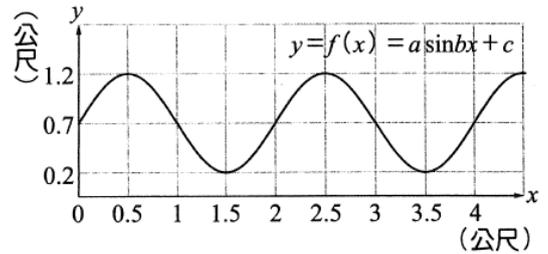
8. pH 值是溶液中氫離子濃度的一種指標，可以衡量此溶液的酸鹼程度，而 pH 值的計算公式為 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ ，其中 $[\text{H}^+]$ 為溶液中的氫離子濃度(體積莫耳濃度)，單位為 $\frac{\text{溶質莫耳數}(\text{mol})}{\text{溶液體積}(\text{L})}$ ，若我們將一瓶 pH 值為 6 且容量為 900mL 的酒精和一杯 pH 值為 7 且

容量為 100mL 的純水混合成稀釋的酒精水溶液，若混合後體積不變，則調製後的 pH 值最接近下列哪一個選項？

- (1) 6.02 (2) 6.03 (3) 6.04 (4) 6.05 (5) 6.06

二、多選題(占 25 分)

9. 健身房中有一種體能訓練叫作戰繩運動，用於增加核心穩定和提升運動爆發力，必須利用核心肌群去穩定身體用動繩子，讓繩子呈現波的狀態，如右圖所示，利用波的形狀去評估訓練者的練習狀況，若將此波形標示於坐標平面上，且此波形的函數為 $y = f(x) = a \sin bx + c$ ，其中 a, b, c 皆為正數，則下列哪些選項是正確的？

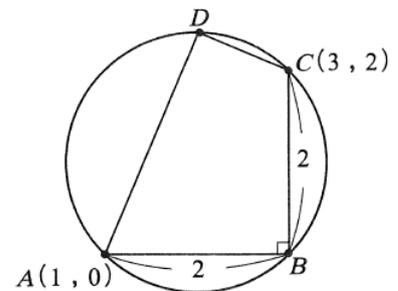


- (1) $y = f(x)$ 的振幅為 1 (2) $y = f(x)$ 的週期為 2 (3) $a = 1$ (4) $b = \pi$ (5) $c = 0.7$
10. 串串高中高三學生有 1000 人，全校學生學測皆五科全考，成績的算術平均數及標準差如下表所示，而小賴國文、英文、數學、自然、社會分別考了 15、12、12、12、10 級分，則下列哪些選項是正確的？

科目 \ 統計量	國文	英文	數學	自然	社會
算術平均數	11	8	6	10	8
標準差	2	3	4	3	2

- (1) 小賴的英文、數學、自然這三科在全校高三的排名一樣
 (2) 小賴的五科成績在全校高三排名以國文表現為最好
 (3) 小賴的五科成績在全校高三排名以社會表現為最差
 (4) 若將每一位同學的數學成績乘以 1.2 倍再加 1 級分，則調整後數學成績的算術平均數為 8 級分
 (5) 承(4)，則調整後數學成績的標準差為 4.8 級分
11. 設三次實係數多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，滿足 $f(-1) = f(0) = f(1) = 0, f(2) = 6$ ，則下列哪些選項是正確的？
- (1) $(0, 0)$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱中心 (2) $y = f(x)$ 圖形的廣域(大域)特徵近似於曲線 $y = x^3$
 (3) $y = f(x)$ 圖形為嚴格遞增
 (4) $y = f(x)$ 圖形在 $x = -1$ 附近的圖形特徵近似於直線 $y = 2x + 2$
 (5) 直線 $y = 2x + 2$ 和 $y = f(x)$ 的圖形恰有一個交點
12. 已知等差數列 $\{a_n\}$ 的前 n 項總和為 S_n ，且 $a_5 = 10, S_3 = 12$ ，若數列 $\left\langle \frac{1}{S_n} \right\rangle$ 的前 n 項總和為 T_n ，則下列哪些選項是正確的？
- (1) $a_1 = 1$ (2) $d = 2$ (3) 對於所有的自然數 n, a_n 必為奇數
 (4) 滿足 $S_n < 100$ 的正整數 n 有 10 個 (5) 對於所有的自然數 $n, T_n < 1$

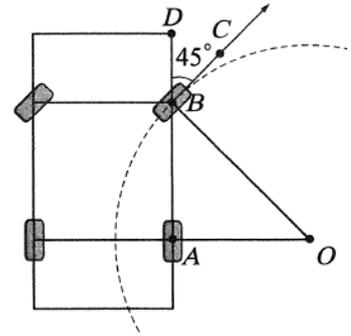
13. 暑假期間是旅遊的旺季，旅行業者推出了遊湖的行程，已知湖泊是一個圓形，且 A, B, C, D 四個景點皆在圓周上，如右圖所示，遊湖船的行程規劃是由 $A(1, 0)$ 出發，沿著直線前進 2 公里到達 B ，再左轉 90° (即 $\angle ABC = 90^\circ$)，沿著直線前進 2 公里到達 $C(3, 2)$ ，再由 C 沿著直線前進到 D ，最後再沿著直線返回 A ，若圖中的直角坐標系中每一個單位長為 1 公里，則下列哪些選項是正確的？



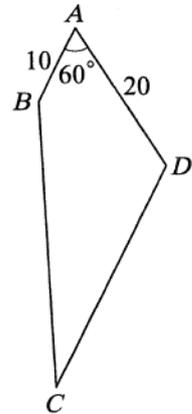
- (1) 此湖泊的直徑為 $2\sqrt{2}$ 公里 (2) 此湖泊的圓方程式為 $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$
 (3) $\angle ADC = 90^\circ$ (4) $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 4$ (5) $\triangle ACD$ 面積的最大值為 2 平方公里

三、選填題(占 20 分)

- 14.如右圖所示，汽車在轉彎時的狀態，其中 $\overline{OA} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{OB} \perp \overline{BC}$ 而 \overline{OB} 就是汽車在轉彎時內側輪胎的旋轉半徑，即為內側輪胎轉向所形成的圓周的半徑，已知兩輪胎的軸距 $\overline{AB} = 3$ 公尺，且輪胎轉彎的角度 $\angle CBD = 45^\circ$ ，則此時轉彎汽車的內側輪胎旋轉半徑 \overline{OB} 長度為_____公尺。(化為最簡根式)

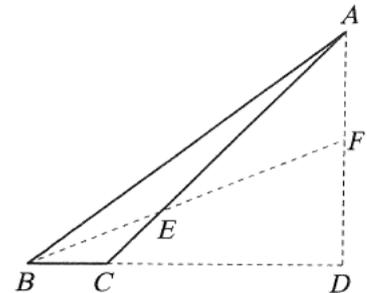


- 15.如右圖所示，有一個四邊形 $ABCD$ 的公園，若 $\overline{AB} = 10$ 公尺， $\overline{AD} = 20$ 公尺， $\angle BAD = 60^\circ$ ，且 $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ，有一個阿伯在公園運動，想從 A 走直線到 C ，則他所移動的距離 $\overline{AC} =$ _____公尺。(化為最簡根式)



16. x^6 除以 $(x+1)^3$ 的餘式為 $R(x)$ ， $R(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 r ，則 r 的值為_____。

- 17.如右圖所示，已知 $\triangle ABC$ 中， D 和 E 分別在 \overrightarrow{BC} 和 \overline{AC} 上，且 $\overline{AD} \perp \overrightarrow{BC}$ ， \overline{AD} 和 \overrightarrow{BC} 交於 F ，若 $\overrightarrow{AB} = (-4, 3)$ ， $\overrightarrow{AC} = (-3, 3)$ ，則 \overrightarrow{BF} 在 \overline{BC} 上的正射影為_____。



第貳部分：混合題或非選擇題(占 15 分)

18-19 題為題組

2021 年初臺灣降雨量不豐沛，導致中部地區水情緊急，雖然有零星降雨，但仍無法紓解水庫嚴峻的狀況，旱災中央災害應變中心宣布，水情紅燈區域臺中及苗栗將分區輪流供水，試回答下列問題。

- 18.原本具體的停水措施是供 5 停 2，也就是在週一到週日選連續兩天停水，但考量民眾便利性，修改為從一週七天中選擇不連續的兩天停水，則選擇停水的方法數為下列哪一個選項？（單選題，3 分）
 (1) C_2^5 (2) C_2^6 (3) C_2^7 (4) P_2^5 (5) P_2^6

- 19.2021 年中梅雨季到來，有稍微紓解了缺水的狀況，但雨量挹注有限，停水措施再修改為在六月份這 30 天當中，選擇 5 天停水，但為了民眾的便利性，不要連續 4 天和 5 天停水，則選擇停水的方法數有多少種？（非選擇題，12 分）

RB420 110 學年度全國高級中學第四次學科能力測驗數學 B(110-E4)

參考答案

選擇題：1. (3) 2. (1) 3. (2) 4. (1) 5. (1) 6. (5) 7. (4) 8. (3) 9. (2)(4)(5) 10. (2)(5)
11. (1)(2)(4) 12. (2)(5) 13. (1)(2)(3)(5)

選填題：14. $3\sqrt{2}$ 15. $10\sqrt{19}$ 16. 1 17. (4,0)

混合題：18. (2) 19. 141830 種