

數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(1)	(2)	(1)	(1)	(5)	(4)
8.	9.	10.	11.	12.	13.	
(3)	(2)(4)(5)	(2)(5)	(1)(2)(4)	(2)(5)	(1)(2)(3)(5)	

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：非負實數之小數或分數次方的意義

解析： $a=3^3$, $b=3^{\frac{1}{2}}$, $c=3^{\frac{4}{3}}$, $d=\frac{1}{\sqrt[6]{3}}=3^{\frac{1}{6}}$

$\therefore 3 > \frac{4}{3} > \frac{1}{6} > -\frac{1}{2} \therefore a > c > d > b$, 故選(3)。

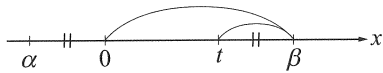
2. (1)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：解絕對值方程式及了解絕對值在數線上的幾何意義

解析： $|x|+|x-t|$ 代表數線上 x 到 0 的距離與 x 到 t 的距離之和

若 $t > 0$, 觀察下圖可知, $\frac{0+t}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = 2 \therefore t=4$



若 $t < 0$, 同理可得 $\frac{0+t}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2} = 2, t=4$ (矛盾)

故選(1)。

3. (2)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：黃金比例的應用問題

解析：正方形 $ABCD$ 、 $CDFE$ 、 $AFGH$ 、 $BHIJ$ 、 $JKLE$ 、 $LMNG$ 的邊長依序為 1、1、2、3、5、8 公分
螺線長度為

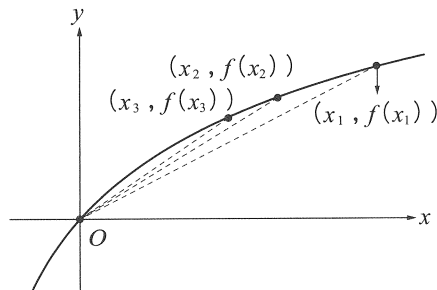
$$2 \times \pi \times 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \pi \times 2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \pi \times 3 \times \frac{1}{4} + 2 \times \pi \times 5 \times \frac{1}{4} + 2 \times \pi \times 8 \times \frac{1}{4} = 10\pi \text{ (公分)}, \text{ 故選(2).}$$

4. (1)

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：對數函數的圖形

解析： $\therefore \frac{1}{a} = \frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0}$ 代表 $(x_1, f(x_1))$ 和 $(0, f(0))$ 的斜率



$$y = f(x) = \log(x+1)$$

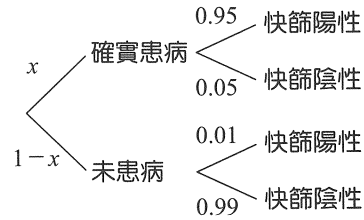
由上圖可知, $\frac{1}{c} > \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \therefore a > b > c$, 故選(1)。

5. (1)

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率與貝氏定理

解析：設確實患病的比例為 x



$$\frac{x \cdot 0.95}{x \cdot 0.95 + (1-x) \cdot 0.01} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow x = 0.05$$

$$\therefore 2000 \times 0.05 = 100 \text{ (人)}$$

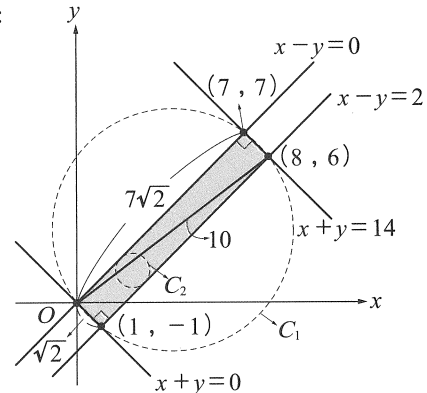
故選(1)。

6. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：二元一次不等式

解析：



如上圖所示, 矩形 Ω 的頂點為 $(0, 0)$, $(1, -1)$, $(8, 6)$,

$(7, 7)$, 長為 $7\sqrt{2}$, 寬為 $\sqrt{2}$, 對角線長為 10,

圓 C_1 的直徑為 10, 圓 C_2 的直徑為 $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \therefore \text{所求為 } \pi \times 5^2 + \pi \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ = 25\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{51\pi}{2} \end{aligned}$$

故選(5)。

7. (4)

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：反矩陣和矩陣乘法

解析：由題意知

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 1$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{得 } A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 21 \end{bmatrix}$$

故選(4)。

8. (3)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：常用對數 \log 的使用

解析：酒精的 pH 值 $= -\log [H^+] = 6 \Rightarrow [H^+] = 10^{-6}$

純水的 pH 值 $= -\log [H^+] = 7 \Rightarrow [H^+] = 10^{-7}$

混合後的氫離子濃度為

$$\frac{10^{-6} \times 0.9 + 10^{-7} \times 0.1}{0.9 + 0.1} = 9.1 \times 10^{-7}$$

\therefore 調製後的 pH 值為

$$-\log(9.1 \times 10^{-7}) = 7 - \log 9.1 \approx 7 - 0.9590 = 6.041$$

故選(3)。

二、多選題

9. (2)(4)(5)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數的圖形

解析：(1) \times : $y=f(x)$ 的振幅為 $\frac{1.2-0.2}{2} = 0.5$

(2) \circ : $y=f(x)$ 的週期為 2

(3) \times : $a=0.5$

(4) \circ : $\frac{2\pi}{b} = 2 \Rightarrow b = \pi$

(5) \circ : $c=0.7$

故選(2)(4)(5)。

10. (2)(5)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：數據的標準化、統計量的線性調整

解析：(1)(2)(3)：小賴的國文、英文、數學、自然、社會成績的標準化數據分別為

$$\frac{15-11}{2} = 2, \frac{12-8}{3} = \frac{4}{3}, \frac{12-6}{4} = \frac{3}{2},$$

$$\frac{12-10}{3} = \frac{2}{3}, \frac{10-8}{2} = 1$$

\therefore 排名最好的是國文，最差的是自然

(4) \times : $1.2 \times 6 + 1 = 8.2$ (級分)

(5) \circ : $1.2 \times 4 = 4.8$ (級分)

故選(2)(5)。

11. (1)(2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次多項式函數的圖形

解析：(1) \circ : 設 $f(x) = ax(x+1)(x-1)$

$$f(2) = 6a = 6 \Rightarrow a = 1$$

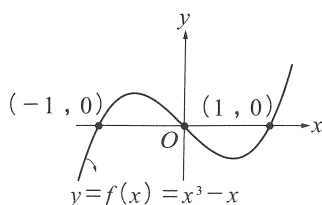
$$\therefore f(x) = x(x+1)(x-1) = x^3 - x$$

$$= (x-0)^3 - (x-0) + 0$$

\therefore 對稱中心為 $(0, 0)$

(2) \circ : $y=f(x) = x^3 - x$ 圖形的廣域(大域)特徵近似於曲線 $y=x^3$

(3) \times : 如下圖所示, $y=f(x)$ 的圖形非嚴格遞增



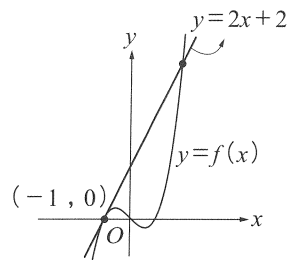
$$(4) \circ : \begin{array}{r} 1 + 0 - 1 + 0 \\ - 1 + 1 + 0 \\ 1 - 1 + 0 \\ - 1 + 2 \\ 1 - 2 \\ - 1 \\ 1 \end{array} \begin{array}{l} - 1 \\ + 0 \\ + 2 \\ + 2 \\ - 1 \\ - 3 \end{array}$$

$$y = f(x) = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 2(x+1) + 0$$

$\therefore y=f(x)$ 圖形在 $x=-1$ 附近的圖形特徵近似

於直線 $y=2(x+1)=2x+2$

(5) \times : 如下圖所示, $y=2x+2$ 和 $y=f(x)$ 有兩個交點



〈另解〉

$$x^3 - x = 2x + 2$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)^2(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ 或 } 2$$

\therefore 有兩個交點

故選(1)(2)(4)。

12. (2)(5)

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列與級數、分項對消法

解析：(1) \times (2) \circ : $\begin{cases} a_5 = a_1 + 4d = 10 \\ S_3 = 3a_1 + 3d = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 2 \\ d = 2 \end{cases}$

(3) \times : $a_n = 2 + (n-1) \times 2 = 2n$ 必為偶數

$$(4) \times : S_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{(2 + 2n) \times n}{2} = n(n+1) < 100$$

$\therefore n = 1, 2, \dots, 9$, 共 9 個

$$(5) \circ : T_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

故選(2)(5)。

13. (1)(2)(3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓的標準式、算幾不等式

解析：(1)(2) \circ : $\because \angle ABC = 90^\circ \therefore \overline{AC}$ 為直徑

$$\text{則圓心為 } \frac{A+C}{2} = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (2, 1),$$

$$\text{半徑為 } \frac{1}{2} \sqrt{(3-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{圓方程式為 } (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$$

(3) \circ : $\because \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

(4) \times : $\because \angle ADC = 90^\circ$

$$\therefore \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AC}^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

(5) \circ : $\triangle ACD$ 面積為 $\frac{\overline{AD} \times \overline{CD}}{2}$,

又 $\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 = 8$, 根據算幾不等式

$$\frac{\overline{AD} + \overline{CD}}{2} \geq \sqrt{\overline{AD} \times \overline{CD}}$$

$$\Rightarrow 4 \geq \overline{AD} \times \overline{CD}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AD} \times \overline{CD}}{2} \leq 2$$

$\therefore \triangle ACD$ 面積的最大值為 2 平方公里

故選(1)(2)(3)(5)。

三、選填題

14. $3\sqrt{2}$

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的定義

解析： $\because \angle ABO = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$

$$\therefore \overline{OB} = \frac{3}{\cos 45^\circ} = 3\sqrt{2} \text{ (公尺)}。$$

15. $10\sqrt{19}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量內積

解析： $|\overline{AC}|^2 = |3\overline{AB} + \overline{AD}|^2$
 $= 9|\overline{AB}|^2 + 6\overline{AB} \cdot \overline{AD} + |\overline{AD}|^2$
 $= 900 + 6 \times 10 \times 20 \times \cos 60^\circ + 400$
 $= 1900$

$$\therefore |\overline{AC}| = \sqrt{1900} = 10\sqrt{19} \text{ (公尺)}。$$

16. 1

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理、餘式定理

解析： $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

長除法如下：

$$\begin{array}{r} x^3 - 3x^2 + 6x - 10 \\ x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \overline{) x^6 + 0x^5 + 0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0} \\ \underline{x^6 + 3x^5 + 3x^4 + x^3} \\ -3x^5 - 3x^4 - x^3 + 0x^2 \\ \underline{-3x^5 - 9x^4 - 9x^3 - 3x^2} \\ 6x^4 + 8x^3 + 3x^2 + 0x \\ \underline{6x^4 + 18x^3 + 18x^2 + 6x} \\ -10x^3 - 15x^2 - 6x + 0 \\ \underline{-10x^3 - 30x^2 - 30x - 10} \\ 15x^2 + 24x + 10 \end{array}$$

$$\therefore R(x) = 15x^2 + 24x + 10,$$

$$r = R(-1) = 15 - 24 + 10 = 1。$$

〈另解〉

設 $x^6 = (x+1)^3 Q(x) + R(x)$

$x = -1$ 代入得 $(-1)^6 = 0 \cdot Q(-1) + R(-1)$

$$\Rightarrow R(-1) = 1。$$

17. (4, 0)

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：正射影

解析： $\because \overline{AD} \perp \overline{BC}$

\overline{BF} 在 \overline{BC} 上的正射影等於 \overline{BA} 在 \overline{BC} 上的正射影

又 $\overline{BA} = (4, -3)$, $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = (1, 0)$

$$\therefore \text{所求為 } \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BC}|^2} \times \overline{BC} = \frac{4}{1} \times (1, 0) = (4, 0)。$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (2)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：組合、加法與乘法原理

解析：

$$C_2^6 = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15, \text{ 故選(2)。}$$

19. 141830 種

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：組合、加法與乘法原理

解析：(任意選) - (連 4 天停水) - (連 5 天停水)

$$= C_5^{30} - C_2^{26} \times 2! - \frac{26!}{25!}$$

$$= 142506 - 650 - 26$$

$$= 141830 \text{ (種)}。$$

〈另解〉

$$\begin{array}{cccccc} C_5^{26} & + & C_4^{26} \times \frac{4!}{3!} & + & C_3^{26} \times \frac{3!}{2!} & + & C_2^{26} \times \frac{3!}{2!} & + & C_2^{26} \times 2! \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (1, 1, 1, 1, 1) & (2, 1, 1, 1) & (2, 2, 1) & (3, 1, 1) & (3, 2) \\ = 65780 + 59800 + 7800 + 7800 + 650 \\ = 141830 \text{ (種)}。 \end{array}$$

◎評分原則

(任意選) - (連 4 天停水) - (連 5 天停水)

$$= C_5^{30} - C_2^{26} \times 2! - \frac{26!}{25!} \left(C_5^{30}, C_2^{26} \times 2!, \frac{26!}{25!} \text{ 各 3 分} \right)$$

$$= 142506 - 650 - 26$$

$$= 141830 \text{ (種)}。(3 \text{ 分})$$

〈另解〉

$$\begin{array}{cccccc} C_5^{26} & + & C_4^{26} \times \frac{4!}{3!} & + & C_3^{26} \times \frac{3!}{2!} & + & C_2^{26} \times \frac{3!}{2!} & + & C_2^{26} \times 2! \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (1, 1, 1, 1, 1) & (2, 1, 1, 1) & (2, 2, 1) & (3, 1, 1) & (3, 2) \end{array}$$

(每寫出一個狀況給 2 分)

$$= 65780 + 59800 + 7800 + 7800 + 650$$

$$= 141830 \text{ (種)}。(2 \text{ 分})$$