

全國高中 112 年(111 學年度) 高三上 第四次學測模擬考數學(數 B)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題 (占 85 分)

一、單選題 (占 35 分)

1. 區間 $\left[\sqrt{22-2\sqrt{57}}, \sqrt{22+2\sqrt{57}} \right]$ 內，包含多少個整數？

- (1)0 個 (2)4 個 (3)6 個 (4)19 個 (5)25 個

答：(2)

解： $\sqrt{22-2\sqrt{57}} = \sqrt{19} - \sqrt{3} \doteq 2.6\dots$ ， $\sqrt{22+2\sqrt{57}} = \sqrt{19} + \sqrt{3} \doteq 6.0\dots$
所求區間內整數為 3, 4, 5, 6

2. 數線上有 $P(x)$ 、 $A(1)$ 、 $B(5)$ ，滿足 $\overline{PA} + \overline{PB} > 7$ 的點，可以用以下哪個不等式表示？

- (1) $|x+1| + |x+5| > 7$ (2) $|x-1| + |x-5| > 7$ (3) $|x-1| - |x-5| > 7$
(4) $|x-5| - |x-1| < 7$ (5) $|x-1| + |x-5| < 7$

答：(2)

3. 下列有限或循環小數中，哪一個化為最簡分數後，其分母最小？

- (1) $0.\overline{01}$ (2) $0.\overline{03}$ (3) 0.04 (4) 0.14 (5) 0.1231

答：(3)

解：(1) $\frac{1}{99}$ (2) $\frac{3}{99} = \frac{1}{33}$ (3) $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$ (4) $\frac{14}{100} = \frac{7}{50}$ (5) $\frac{1231}{10000}$

4. 在坐標平面上有兩點 P 、 Q ，坐標分別為 $P(1,0)$ 、 $Q(\log 2, \log 5)$ 。

直線 L 通過 P 、 Q 兩點，則下列敘述何者正確？

- (1) L 垂直於 y 軸 (2) L 通過原點 (3) L 斜率大於 -1
(4) L 不通過第三象限 (5) L 的 y 截距大於 1

答：(4)

解：斜率 $= \frac{\log 5}{\log 2 - 1} = \frac{\log 5}{-\log 5} = -1 \Rightarrow L: x + y = 1$

5. 佩珂仰望月球，直直盯著月亮正中心。她想起古時候有一句詩詞：「但願人長久，千里共嬋娟」，因此，佩珂好奇地想了解此時此刻地球上那些地方仰望月球中心時，與她所處的地點有一樣的仰角。假設地球為半徑 15 單位的正球體，沒有地形起伏也沒有任何遮蔽物與光害會妨礙觀月，月球可視為一個點且距離地球中心為 25 單位，佩珂所在地點與月球恰好距離 20 單位，那麼與佩珂觀測地點有著相同仰角的其他地點，在地球上會形成什麼樣的形狀？

- (1) 半徑 25 的圓 (2) 半徑 20 的圓 (3) 半徑 16 的圓
(4) 半徑 12 的圓 (5) 半徑 9 的圓

答：(4)

解： $\frac{20 \times 15}{2} = \frac{25 \times h}{2} \Rightarrow h = 12$

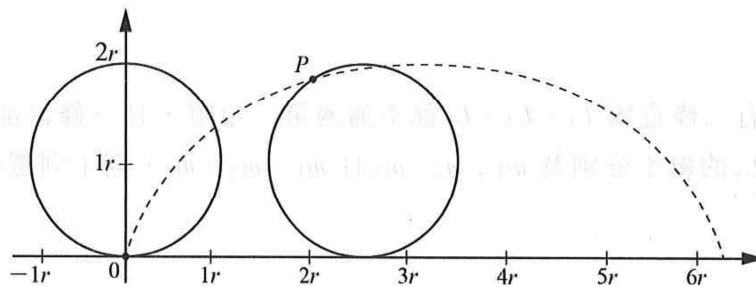
6. 平面上有不垂直且不平行的二等長向量 \vec{u} 、 \vec{v} ，則下列哪一組向量相互垂直？

- (1) $\vec{u} + \vec{v}$ 、 $\vec{u} - \vec{v}$ (2) $|\vec{v}| \vec{u}$ 、 $|\vec{u}| \vec{v}$ (3) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}$ 、 $(\vec{v} \cdot \vec{u}) \vec{v}$
 (4) $\vec{u} + 2\vec{v}$ 、 $2\vec{u} + \vec{v}$ (5) $\vec{u} + 2\vec{v}$ 、 $2\vec{u} - \vec{v}$

答：(1)

解：僅(1)確定內積 $= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 = 0$

7. 如圖，某一動圓上有一點 P ，動圓沿著地面向前滾動一圈， P 點形成的軌跡如圖中虛線所示。已知軌跡與 x 軸所包圍面積為 100 是動圓面積的 3 倍，則動圓的半徑約為多少？



- (1) 1 (2) 3 (3) 5 (4) 7 (5) 10

答：(2)

解： $100 = 3 \times \pi r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{100}{3\pi}} \approx 3$

二、多選題 (占 25 分)

8. 阿爾法與貝塔在西元 2010 年 1 月 1 日開創自己的公司，兩公司分別有 100 萬、200 萬的初始資本額，且每年成長率皆相同。其中阿爾法的經營手腕較好，公司資本額恰好每 8 年翻倍；貝塔公司資本額恰好每 12 年翻倍。請依據上述情境回答以下問題：

- (1) 在西元 2016 年 1 月 1 日，貝塔公司的資本額低於 350 萬
 (2) 在西元 2014 年 1 月 1 日，阿爾法公司的資本額超過 150 萬
 (3) 阿爾法公司的資本額每年成長率低於 10%
 (4) 西元 2035 年 1 月 1 日時，阿爾法公司的資本額超過貝塔公司的資本額
 (5) 西元 2058 年 1 月 1 日時，兩間公司資本額合計超過 1 億

答：(1)(3)(4)

解：(1) $\beta_{2016} = 200 \times 2^{\frac{6}{12}} = 200 \sqrt{2} \approx 282.8$

(2) $\alpha_{2014} = 100 \times 2^{\frac{4}{8}} = 100 \sqrt{2} = 141.4$

(3) $2^{\frac{1}{8}} = \left(10^{\log 2} \right)^{\frac{1}{8}} \approx 10^{0.037625} \approx 1.09 \approx 1 + 9\%$

$$(4) 100 \times 2^{\frac{t}{8}} > 200 \times 2^{\frac{t}{12}} \Rightarrow 2^{\frac{t}{24}} > 2 \Rightarrow \frac{t}{24} > 1 \Rightarrow t > 24 \Rightarrow t \geq 25$$

$$(5) 100 \times 2^{\frac{48}{8}} + 200 \times 2^{\frac{48}{12}} = 100 \times 2^6 + 200 \times 2^4 = 9600$$

9. 領導係數為1的三次多項式 $f(x)$ 滿足： $f(2022)=2+0+2+2$ ， $f(2023)=2+0+2+3$ ， $f(2024)=2+0+2+4$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) $f(2025)=2+0+2+5$ (2) $f(2020)+f(2026)=14$
 (3) $y=f(x)$ 的圖形，與 x 軸僅有1個交點 (4) $y=f(x)$ 的圖形，始終遞增
 (5) $y=f(x)$ 的圖形，可由 $y=x^3+3x$ 經過適當平移得到

答：(2)(3)(4)

解：∵ $\deg f(x)=3$ 且 $f(2022)+f(2024)=2f(2023)$

表點 $(2023, 7)$ 為對稱中心點，又領導係數=1

$$\therefore f(x)=(x-2023)^3+p(x-2023)+7$$

$$\therefore f(2024)=1+p+7=8 \Rightarrow p=0 \Rightarrow f(x)=(x-2023)^3+7$$

$$(1) f(2025)=8+7=15$$

$$(2) f(2020)+f(2026)=2f(2023)=2 \times 7=14$$

(3)(4) $f(x)$ 為單調遞增，故與 x 軸僅交於一點

(5) 由 $y=x^3+7$ 平移而來

10. 坐標平面上有三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 都不通過第三象限，且三條線都通過 $(1,1)$ 。

若 L_1 、 L_2 、 L_3 的斜率分別為 m_1 、 m_2 、 m_3 且 $m_1 > m_2 > m_3$ ，則下列選項哪些正確？

- (1) $m_1 > 0$ (2) $m_2 > 0$
 (3) $m_3 < 0$ (4) L_1 的 x 截距 $>$ L_2 的 x 截距 $>$ L_3 的 x 截距
 (5) L_1 的 y 截距 $>$ L_2 的 y 截距 $>$ L_3 的 y 截距

答：(3)(4) (此題佳)

解：∵ 不過第三象限，且過 $(1,1)$ 點，又 $m_1 > m_2 > m_3$

$$\therefore 0 > m_1 > m_2 > m_3$$

而 y 截距： $L_3 > L_2 > L_1$ ， x 截距： $L_1 > L_2 > L_3$

11. 平面上有一圓 $C : (x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ 被 x 軸與 y 軸分割為四個區域，

在第一、二、三、四象限的面積分別為 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 ，則下列選項哪些正確？

- (1) $A_1 > A_3$ (2) $A_1 + A_3 > A_2 + A_4$ (3) $A_1 < 4\pi$
 (4) $A_4 > 4\pi$ (5) $|A_1 + A_3 - A_2 - A_4| = 8$

答：(3)(4)(5)

解： $A_1 = a+b$ ， $A_2 = a$ ， $A_3 = a+c$ ， $A_4 = a+b+c+8$

∵ 弓形 $(A_1 + A_2)$ 弦心距=2，弓形 $(A_2 + A_3)$ 弦心距=1

∴ 弓形 $(A_1 + A_2) <$ 弓形 $(A_2 + A_3)$

$$(1) A_1 = a + b < A_3 = a + c \Rightarrow b < c$$

$$(2) A_1 + A_3 = 2a + b + c < A_2 + A_4 = 2a + b + c + 8$$

$$(3) A_1 + A_2 = \frac{1}{2} \times 4^2 \times \frac{2\pi}{3} - \frac{1}{2} \times 4^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} < 4\pi$$

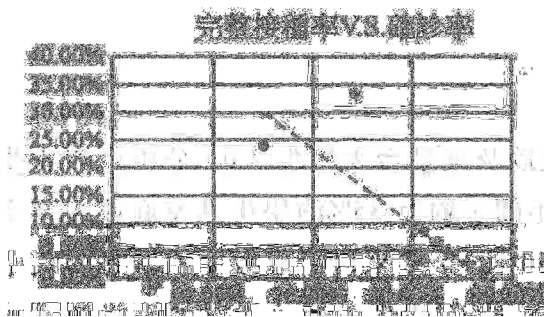
$$\Rightarrow A_1 < 4\pi$$

$$(4) A_4 > \frac{1}{4} \text{圓} = 4\pi$$

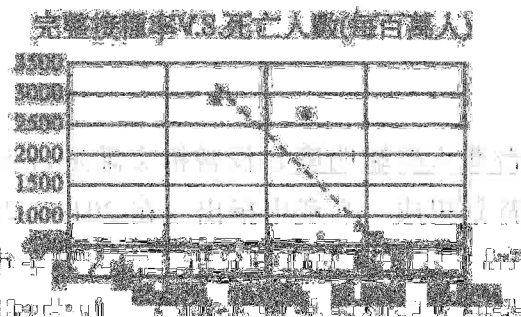
(5) 正確

12. COVID-19 肆虐全球，下表為台、美、英、日、中五地的疫苗完整接種率、確診率與死亡人數（每百萬人），統計至 2022/5/16，其中疫苗完整接種率與確診率的相關係數為 r_1 、疫苗完整接種率與死亡人數（每百萬人）的相關係數為 r_2 ；圖(一)與圖(二)依據下表所繪製之散布圖，橫軸皆為完整接種率，虛線為迴歸直線（最適合直線），則下列選項哪些正確？

	完整接種率	確診率	死亡人數（每百萬人）
台灣	80.8%	2.24%	46
美國	78.1%	2.17%	27
英國	79.1%	2.37%	27
日本	79.8%	3.82%	18
中國	87.0%	1.46%	9



圖(一)



圖(二)

- (1) 若將英國的數據移除，則 r_1 之值變大
- (2) 若將英國的數據移除，則 r_2 之值變小
- (3) 確診率與死亡人數（每百萬人）為負相關
- (4) 由圖表中分析，若某國家完整接種率僅有 60%，則理論上有超過 30% 的國民確診
- (5) 由圖表中分析，若某國家接種率超過 90%，則理論上沒有國民會因 COVID-19 死亡

答：(2)(4)(5)

解：(1) $|r_1|$ 變大 $\xrightarrow{r_1 < 0}$ r_1 變小

(2) $|r_2|$ 變大 $\xrightarrow{r_2 < 0}$ r_2 變小

(3) 應為正相關

(4)(5) 正確

三、選填題 (占 25 分)

13. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $A^{2022} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 則 $a+b+c+d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：-2

解： $A = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix} \Rightarrow A^4 = I$

$$A^{2022} = A^2 = \begin{bmatrix} \cos(-180^\circ) & -\sin(-180^\circ) \\ \sin(-180^\circ) & \cos(-180^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

14. 已知 a 、 b 、 c 為非負實數，對於三角函數 $y = a \sin\left(\frac{\pi x}{b} + 1\right) + c$ ，已知其最大值為 10，最小值為 2，且函數圖形中任選一波峰，計算其與最近的波谷之最短距離為 10，則數對 $(a, b, c) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

答：(4, 6, 6)

解： $Max = 10 = c + a$, $Min = 2 = c - a \Rightarrow c = 6, a = 4$

$$\text{半週期} \sqrt{10^2 - (10 - 2)^2} = 6 = \pi \times \frac{b}{\pi} \Rightarrow b = 6$$

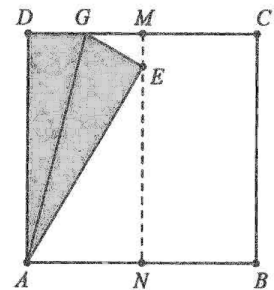
15. 台灣大學駱明慶教授曾撰文誰是台大學生以及誰是台大學生 2.0，分析台灣大學學生之背景組成。文章中指出：在 2011~2014 年間，約有 35% 的學生其家庭收入為全國的前 5%；若以畢業高中分析，台大學生中約 40% 的學生來自於錄取率前五名的高中。假設台灣大學每年招收 4500 人，且家庭收入前 5% 的學生中有一半就讀於錄取率前五名的高中，那麼在符合上述趨勢的狀況下，有 位學生既非家庭收入在前 5%，也不是來自於錄取率前 5 名的高中。（四捨五入至個位）

答：1913

解： $4500 [1 - P(\text{收入前 5\%}) - P(\text{高中前五名}) + P(\text{收入前 5\% 且高中前五名})]$

$$= 4500 \left[1 - \frac{35}{100} - \frac{40}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{1}{2} \right] = 1912.5 \approx 1913$$

16. 如圖，在一個邊長為 2 的正方形紙張 $ABCD$ ，先將其沿著兩對邊 \overline{AB} 、 \overline{CD} 中點 M 、 N 連線對折後打開，得到摺痕 MN 。固定 A 點，將 D 點折到 MN 上得到 E 點，則四邊形 $ADGE$ 面積為 。（請使用參考公式之近似值計算，四捨五入至小數點後第三位）



答：1.072

解： $\overline{DG} = \overline{EG} = x \Rightarrow \overline{GM} = 1 - x$

$$\overline{DA} = \overline{EA} = 2, \overline{AN} = 1 \Rightarrow \overline{EN} = \sqrt{3} \text{ 且 } \overline{EM} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{則直角 } \triangle GEM \text{ 中 } \Rightarrow (1-x)^2 + (2-\sqrt{3})^2 = x^2 \Rightarrow x = 4 - 2\sqrt{3}$$

$$\text{故 } ADGE \text{ 面積} = \frac{2x}{2} \times 2 = 2x = 8 - 4\sqrt{3} \approx 1.072$$

17. 有大小相同的6顆球，分別是紅色1~3號，綠色1~3號，將它們排成一列，有 X 種方法；但對於無法辨別紅、綠色的紅綠色盲，只能辨別數字，從色盲的觀點來看，全部的排列數只有 Y 種，則 $X - Y$ 之值為_____。

答：630

$$\text{解： } 6! - \frac{6!}{2!2!2!} = 720 - 90 = 630$$

第貳部分：混合題或非選擇題（占15分）

第18至20題為題組

籤筒中有一些籤，沂沂本來以為籤筒中的籤是1到 n 號的正整數剛好各一支，但其實籤筒內有1支1號籤，2支2號籤，以此類推，直到10支10號籤。已知每支籤被抽到的機率一樣，且沂沂知道籤的總數。請依據此情境回答以下問題：

18. 在沂沂的主觀機率下，抽一支籤其號碼的期望值為何？（單選題）

- (1) 5.5 (2) 10 (3) 11 (4) 28 (5) 56

答：(4)

$$\text{解： } 1 + 2 + 3 + \dots + 10 = \frac{11 \times 10}{2} = 55 \text{ (總籤數)}$$

$$E(X_1) = \frac{1}{55} [1 + 2 + \dots + 55] = \frac{1}{55} \times \left[\frac{55 \times 56}{2} \right] = 28$$

19. 實際上，抽一支籤其號碼的期望值為何？

答：7

$$\text{解： } E(X_2) = \frac{1}{55} [1 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 10 \times 10] = \frac{1}{55} \times \left[\frac{10 \times 11 \times 21}{6} \right] = 7$$

20. 有人告訴沂沂，她誤會了籤筒的狀況，沂沂半信半疑地同時抽兩支籤來檢驗，若抽出的兩支籤同號，她就明白自己誤會了，否則她就會相信自己是對的。已知沂沂做完檢驗後，發現自己誤會了，那麼檢驗時，沂沂抽到2支10號籤的機率為多少？

答： $\frac{3}{11}$

$$\text{解： } \frac{C_2^{10}}{C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \dots + C_2^{10}} = \frac{C_2^{10}}{C_3^{11}} = \frac{45}{165} = \frac{3}{11}$$