數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(5)	(4)	(1)	(5)	(4)	(4)	(2)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(4)(5)	(1)(2)(4)(5)	(1)(4)	(1)(2)(3)(4)(5)	(3)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線方程式、直線的斜率

解析：(1) $m_1=\dfrac{6-4}{-2-1}=-\dfrac{2}{3}$

(2) L_2 通過 $(-4,0)$，$(0,-5)\Rightarrow m_2=\dfrac{0-(-5)}{-4-0}=-\dfrac{5}{4}$

(3)直線 $5x-3y=1$ 的斜率為 $\dfrac{5}{3}$，又與 L_3 垂直

$\Rightarrow m_3=-\dfrac{3}{5}$

(4)直線 $x+y=0$ 的斜率為 -1，又與 L_4 平行 $\Rightarrow m_4=-1$

(5) $m_{\overleftrightarrow{PQ}}=\dfrac{2-4}{-2-2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow m_5=-2$

故選(5)。

2. (4)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：等比級數與二項式定理

解析：第 n 層的數字和為 $(1+1)^n=2^n$

所求 $=2+4+8+\cdots\cdots+64=\dfrac{2(2^6-1)}{2-1}=126$

故選(4)。

3. (1)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉、第二冊〈三角比〉

目標：空間中兩點距離公式與餘弦定理

解析：定坐標：$O(0,0,0)$，$A(2,0,0)$，$B(2,2,0)$，$C(0,2,0)$，$G(0,2,2)$

$\overline{AB}$ 中點 M 的坐標為 $(2,1,0)$

$\overline{OM}=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{OG}=\sqrt{(0-0)^2+(2-0)^2+(2-0)^2}=2\sqrt{2}$

$\overline{MG}=\sqrt{(0-2)^2+(2-1)^2+(2-0)^2}=3$

$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt{5})^2+3^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times\sqrt{5}\times 3}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

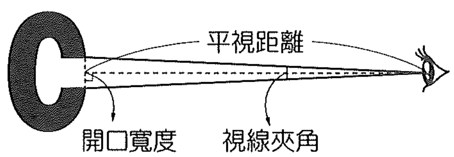
故選(1)。

4. (5)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：三角比的定義

解析：如圖，設站在離該圖 y 公尺(即 $1000y$ 毫米)的位置



依照三角比定義可知：

$\tan\left(\dfrac{1}{2}\times 1\text{角分}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times\text{開口寬度}}{\text{平視距離}}$

$\Rightarrow\tan\left(\dfrac{1}{120}\right)^\circ=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times 1}{1000y}$

$\Rightarrow y=\dfrac{\dfrac{1}{2}\times 1}{1000}\times\dfrac{1}{\tan\left(\dfrac{1}{120}\right)^\circ}=\dfrac{1}{2000\times\tan\left(\dfrac{1}{120}\right)^\circ}$

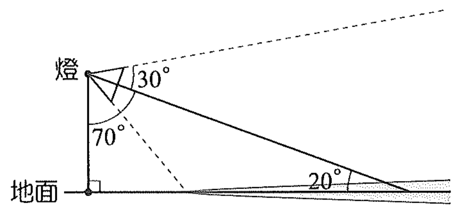
故選(5)。

5. (4)

出處：第四冊〈圓錐曲線的認識與應用〉

目標：圓錐截痕圖形的判定

解析：由題意可知光錐的邊界與軸的夾角為 30°，又燈旋轉 70°，可得以下圖形，與地面相交區域邊界圖形為雙曲線的一部分



故選(4)。

6. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式函數的圖形與不等式

解析：$x(x-2)(x-5)f(x)<0$ 的解

與 $x(x-2)(x-5)(x-2)<0$ 相同

其解為 $0<x<2$ 或 $2<x<5$

可知整數解有 $x=1$，3，4

共 3 個整數解，得 $k=3$

故選(4)。

7. (2)

出處：第二冊〈數列與級數〉、第一冊〈指數、對數〉

目標：有理數，無理數，指數，數列遞迴關係式

解析：化為指數 $a_1=7^{7^{-1}}$，$a_{n+1}=(a_n)^{7^{\frac{1}{7}}}$

所以 $a_2=(a_1)^{7^{\frac{1}{7}}}=(7^{7^{-1}})^{7^{\frac{1}{7}}}=7^{7^{-1+\frac{1}{7}}}$，

$a_3=(a_2)^{7^{\frac{1}{7}}}=(7^{7^{-1+\frac{1}{7}}})^{7^{\frac{1}{7}}}=7^{7^{-1+\frac{1}{7}\times 2}}$，……

$a_8=7^{7^{-1+\frac{1}{7}\times 7}}=7$，可知最小正整數 $n=8$

故選(2)。

二、多選題

8. (1)(4)(5)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數的伸縮、平移與週期

解析：(1)○：$y=\sin x$ 的圖形往左平移 π 單位後得到 $y=\sin(\pi+x)=-\sin x$ 的圖形

(2)╳：$y=\sin x$ 的圖形往右平移 4π 單位後得到 $y=\sin(-4\pi+x)=\sin x$ 的圖形

(3)╳：$y=\sin(20\pi x)$ 的週期為 $T=\dfrac{2\pi}{20\pi}=\dfrac{1}{10}$ 秒，其頻率為 $f=10\text{Hz}$

(4) ○：$y=\sin(3000\pi x)$ 的週期為 $T=\dfrac{2\pi}{3000\pi}=\dfrac{1}{1500}$ 秒，其頻率為 $f=1500$Hz，其頻率在 20Hz～20000Hz 之內

(5) ○：$y=\sin(60000\pi x)$ 的週期為

$T=\dfrac{2\pi}{60000\pi}=\dfrac{1}{30000}$ 秒，其頻率為 $f=30000$Hz，為人類無法聽到的範圍

故選(1)(4)(5)。

9. (1)(2)(4)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：古典機率、排列運算與條件機率

解析：(1) ○：連續三張都是奇數，方法數為

$P_3^4=4\times3\times2=24$ (種)

(2) ○：連續三張都是偶數，方法數為

$P_3^3=3\times2\times1=6$ (種)

(3) ╳：乘積為奇數的方法只有三張都是奇數，

故機率為 $\dfrac{P_3^4}{P_3^7}=\dfrac{24}{210}=\dfrac{4}{35}$，

則乘積為偶數的機率為 $1-\dfrac{4}{35}=\dfrac{31}{35}$

(4) ○：所求 $=P$(皆為偶 | 積為偶)

$$=\frac{P(\text{皆為偶}\cap\text{積為偶})}{P(\text{積為偶})}=\frac{\frac{6}{210}}{\frac{31}{35}}=\frac{1}{31}$$

(5) ○：滿足題意之方法數可分為兩大類：連續三張都是奇數或連續三張都是偶數，故由(1)(2)可知，滿足題意的機率為

$$\frac{P_3^4+P_3^3}{P_3^7}=\frac{4\times3\times2+3\times2\times1}{7\times6\times5}=\frac{24+6}{210}$$

$$=\frac{30}{210}=\frac{1}{7}$$

〈另解〉

差為 2 的倍數者有 1，3，5 或 1，3，7

或 1，5，7 或 2，4，6 或 3，5，7

且可排列順序各有 3! 種

故機率為 $\dfrac{5\times3!}{210}=\dfrac{1}{7}$

故選(1)(2)(4)(5)。

10. (1)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：資料的閱讀理解、迴歸直線(最適直線)方程式與二維數據散布圖的應用

解析：(1) ○：因散布圖顯示，每日病例數 X 市與 Y 市為正相關，且 X 市與 Z 市也為正相關，因此 Y 市與 Z 市每日病例數亦為正相關

(2) ╳：由散布圖數據離散程度可知 $R>0.91$

(3) ╳：由兩者的迴歸直線(最適直線)方程式得知

$0.51=0.91\times\dfrac{\sigma_z}{\sigma_x}\Rightarrow\dfrac{\sigma_z}{\sigma_x}=\dfrac{0.51}{0.91}<1\Rightarrow\sigma_z<\sigma_x$，

應為 X 市每日病例數的標準差大於 Z 市每日病例數的標準差

(4) ○：由題目條件得 $\sigma_y>\sigma_z$，又由(2)得 $R>0.91$，則可知

$a=R\times\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}>0.91\times\dfrac{\sigma_z}{\sigma_x}=0.51\Rightarrow a>0.51$

(5) ╳：相關係數只顯現兩變量之間線性關係程度的高低，並不代表兩者間存在有因果關係

故選(1)(4)。

11. (1)(2)(3)(4)(5)

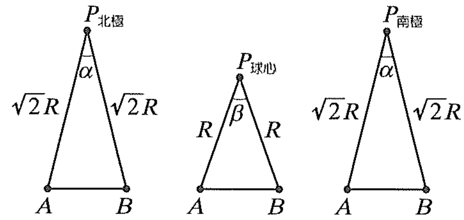
出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：理解空間中的「角」是落在某一平面上的，可找到平面上的三角形來計算角度；而兩面角的「角」，是要用兩平面的公垂面與兩平面的截痕來計算的

解析：(1) ○：C 點之 z 坐標為 $8\sin30^\circ=4$

(2) ○：所求 $=(2\times$地球半徑$\times\pi)\times\cos30^\circ=8\sqrt{3}\,\pi$

(3) ○：因為 AB 都沒有改變位置，可以觀察 AP 和 BP 的長度來判斷角度路徑：北極→球心→南極，如下圖所示



可知 $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\frac{\overline{AB}}{2}}{\sqrt{2}R}<\sin\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\frac{\overline{AB}}{2}}{R}$，且 α、β 均為第一象限角

$\therefore\alpha<\beta$，故 $\angle APB$ 會先變大再變小

(4) ○：平面 ANS 與平面 BNS 的兩面角即為 45°，為此路線中 $\angle APB$ 的最大值

(5) ○：赤道為△ABQ 的外接圓，所以 $\angle AQB$ 為對上圓弧 $\overparen{AB}$ 的圓周角，故保持不變

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

12. (3)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：貝氏定理

解析：設 A 為小惠評估小凱是理想情人的事件、B 為小凱約會提早到的事件，則由題目敘述可得

$P(A)=40\ \%$、$P(B\mid A)=85\ \%$、$P(B\mid A')=60\ \%$

(1) ╳：由機率的性質知道 $P(A')=1-P(A)=60\ \%>50\ \%$

(2) ╳：由分割可得

$P(B)=P(B\mid A)P(A)+P(B\mid A')P(A')=70\ \%$

(3) ○：由(2)的計算知 $70\ \%>60\ \%$

(4) ╳：由條件機率可知

$P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{17}{35}<\dfrac{1}{2}=50\ \%$

(5) ○：由(4)的計算知 $\dfrac{17}{35}>40\ \%$，故與見面前相比是變大了

故選(3)(5)。

三、選填題

13. (1，9)

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：矩陣的乘法運算與合併

解析：$A=\begin{bmatrix}2&2\\2&-2\end{bmatrix}$

$A^2=AA$

$=\begin{bmatrix}2&2\\2&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2\\2&-2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}8&0\\0&8\end{bmatrix}=8\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=8I_2$

所以原式 A^2+A+I_2

$=8I_2+A+I_2$

$=A+9I_2$

故得數對 $(p,q)=(1,9)$。

14. $-3\le k\le 11$

出處：第一冊〈數與式〉

目標：數線與絕對值的應用

解析：由題意可列式解 $\left|k-\frac{8}{3}\right|+\left|k-\frac{16}{3}\right|\le 14$，再分段討論如下：

Ⅰ. 若 $k\ge\frac{16}{3}$，則 $k-\frac{8}{3}+k-\frac{16}{3}\le 14$，即 $k\le 11$，得 $\frac{16}{3}\le k\le 11$

Ⅱ. 若 $\frac{8}{3}\le k<\frac{16}{3}$，則 $k-\frac{8}{3}-k+\frac{16}{3}\le 14$，即 $\frac{8}{3}\le 14$，恆成立

Ⅲ. 若 $k<\frac{8}{3}$，則 $-k+\frac{8}{3}-k+\frac{16}{3}\le 14$，即 $k\ge -3$，得 $-3\le k<\frac{8}{3}$

由以上三式得 $-3\le k\le 11$。

15. $\frac{3}{28}$

出處：第二冊〈數據分析〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：中位數的定義、組合、古典機率

解析：原有 9 位同學，隨機刪除 3 人後剩 6 人為偶數，故中位數為排序後第 3 位與第 4 位同學成績相加再除以 2

又由題目可知中位數 $=85=\frac{84+86}{2}$

可能刪法：

(50、60、77 三選一)、85、(89、95、100 三選一)

所求 $=\frac{C_1^3C_1^3}{C_3^9}=\frac{9}{84}=\frac{3}{28}$。

16. 2

出處：第一冊〈數與式〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：根式的運算、常用對數的對數律與換底公式的運算

解析：$x=\frac{1}{2}\left(\log_2\sqrt{4+\sqrt{12}}+\log_2\sqrt{4-\sqrt{12}}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{\log\sqrt{4+\sqrt{12}}}{\log 2}+\frac{\log\sqrt{4-\sqrt{12}}}{\log 2}\right)$

$=\frac{1}{2\log 2}\times\log\left(\sqrt{4+\sqrt{12}}\times\sqrt{4-\sqrt{12}}\right)$

$=\frac{1}{2\log 2}\times\log\sqrt{4}=\frac{1}{2}$，得 $4^x=4^{\frac{1}{2}}=2$。

17. 15

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量的內積、正射影

解析：$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}$，

且 $\overrightarrow{OQ}=4\overrightarrow{OP}$

故 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=4(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA})=20$

可知 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=5$

故 $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{OA}$

$=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}$

$=15$。

18. 32400

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：了解指數函數並會處理在金融上的應用問題

解析：原公司方案所獲得的錢

$10000(1+25\%)^2+20000(1+25\%)+10000$

$=10000\left[(1+25\%)^2+2(1+25\%)+1\right]$

$=10000(2+25\%)^2$

假設一開始直接付 x 元，兩期後所能得到的錢為 $x(1+25\%)^2$ 元

一次付清要大於等於原來的方案，則可得

$x(1+25\%)^2\ge 10000(2+25\%)^2$

$\Rightarrow x\ge 10000\times\frac{(2+25\%)^2}{(1+25\%)^2}=10000\times\left(\frac{9}{5}\right)^2=32400$ (元)。

第貳部分、混合題或非選擇題

19. (2)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數的圖形與週期性現象

解析：由表可知，位置 5 到下一個位置 5 經過 4 秒，可知週期為 4 秒，振幅為 $\frac{5-(-5)}{2}=5$，故 $T+h=9$

故選(2)。

20. $x=5\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)$

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：正弦函數的圖形與週期性現象

解析：週期 $4=\frac{2\pi}{b}\Rightarrow b=\frac{\pi}{2}$

振幅 $5=a$

平衡點 $0=d$

故可得 $x=5\sin\left(\frac{\pi}{2}t+c\right)$

再將 $(t,x)=(0,5)$ 代入上式

$\Rightarrow 5=5\sin\left(\frac{\pi}{2}\times 0+c\right)\Rightarrow\sin c=1$

$\Rightarrow c=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 為整數

已知 $0\le c<2\pi$，故 $c=\frac{\pi}{2}$

即 $x=5\sin\left(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)$。

◎評分原則

週期 $4=\dfrac{2\pi}{b}\Rightarrow b=\dfrac{\pi}{2}$　(1 分)

振幅 $5=a$　(1 分)

平衡點 $0=d$　(1 分)

故可得 $x=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+c\right)$

再將 $(t, x)=(0, 5)$ 代入上式

$\Rightarrow 5=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\times 0+c\right)\Rightarrow \sin c=1$

$\Rightarrow c=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，其中 k 為整數

已知 $0\leq c<2\pi$，故 $c=\dfrac{\pi}{2}$　(2 分)

即 $x=5\sin\left(\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\right)$。　(1 分)