數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(4)	(3)	(5)	(4)	(1)	(4)
8.	9.	10.	11.	12.		
(4)(5)	(1)(3)(5)	(2)(3)(5)	(2)	(2)(4)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (2)

出處：第一冊〈指數、對數〉、第三冊〈按比例成長模型〉

目標：對數運算

解析：根據半衰期定義 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{T}}=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\Rightarrow\frac{100}{T}=3$

或取對數後 $\frac{100}{T}\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{8}$

$\Rightarrow\frac{T}{100}=\frac{\log\frac{1}{2}}{\log\frac{1}{8}}=\frac{\log 2}{\log 8}=\frac{1}{3}$

故 $T=\frac{100}{3}\approx 33$ 小時

故選(2)。

2. (4)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第二冊〈數列與級數〉

目標：等差數列第 n 項解公差 d 的一次不等式

解析：數列需同時滿足條件

①$\frac{50}{a_{50}}<\frac{1}{2}\Rightarrow a_{50}=11+49d>100$

$\Rightarrow d>\frac{89}{49}\approx 1.82$

②$\frac{k}{a_k}<\frac{k+1}{a_{k+1}}$ (其中 $k=1$，2，……，49)

將 $a_k=11+(k-1)d$，$a_{k+1}=11+kd$ 代入上式可得

$11-d>0$

由①、②可得 $d=2$，3，……，10，共 9 個整數解

故選(4)。

3. (3)

出處：第四冊〈機率〉

目標：獨立事件機率計算

解析：當兩配件皆正常時，機器才可以正常運作

其機率為 $(1-0.1)\times(1-0.3)=0.63$

所以機器無法運作的機率為 $1-0.63=0.37$

選項中最接近的數值為 0.4

故選(3)。

4. (5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

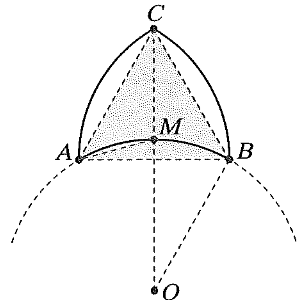
目標：弧長對應圓周角計算、正弦定理

解析：因為 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

所以 $\angle BAC=\angle ACB=60^\circ$

將 $\overset{\frown}{AB}$ 的圓畫出，假設圓心為 O

如下圖所示



$\angle ACM=\frac{1}{2}\angle ACB$

$=30^\circ$

圓周角 $\angle MAB=\frac{1}{2}\angle MOB=\frac{1}{2}\times 30^\circ=15^\circ$

所以 $\angle MAC=\angle BAC-\angle MAB$

$=45^\circ$

由正弦定理可推得 $\frac{\overline{AM}}{\overline{CM}}=\frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故選(5)。

5. (4)

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：矩陣乘法運算

解析：(1)╳：$\begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5b+6a \\ 5d+6c \end{bmatrix}$

(2)╳：$\begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b & d \\ a & c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5b+6a & 5d+6c \end{bmatrix}$

(3)╳：$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5a+6c & 5b+6d \\ 5a+6c & 5b+6d \end{bmatrix}$

(4)○：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5b & 6a \\ 5d & 6c \end{bmatrix}$

(5)╳：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6b & 5a \\ 6d & 5c \end{bmatrix}$

故選(4)。

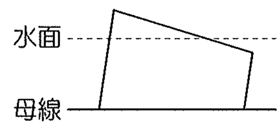
6. (1)

出處：第四冊〈圓錐曲線的認識與應用〉

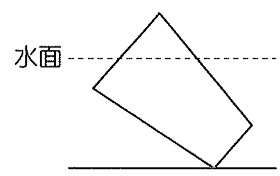
目標：圓錐曲線截痕判斷

解析：過程中分 3 個階段：

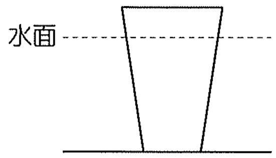
①側置於平坦的水平桌面上時(杯子側面平放在桌面)，水面會與側面平行，即水面與某條母線平行，所以水面的截痕為拋物線的一部分，如下圖所示



②杯子上底往上抬高時，水往下底匯聚，平面只與圓錐面一側相交，所以水面的截痕為橢圓的一部分，如下圖所示



③杯子下底與桌面重合時，水面會與錐體中心軸垂直，所以水面的截痕為圓，如下圖所示



故選(1)。

7. (4)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：取球的排列組合問題

解析：因為兩人所選的 4 顆球號皆不同，可以將取球過程轉換為：

先從 8 顆球選 2 顆球，

號碼大的為甲的十位數字，

號碼小的為乙的十位數字；

再從剩餘的 6 顆球選 2 顆球，

號碼大的為甲的個位數字，

號碼小的為乙的個位數字；

所以方法數共有 $C_2^8C_2^6=28\times15=420$ 種

故選(4)。

二、多選題

8. (4)(5)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：分段討論變數 x 的範圍將絕對值方程式化為一元一次方程式求解

解析：分段討論 $|x|+kx=111$

$$\Rightarrow\begin{cases}(k+1)x=111，x\ge0\\(k-1)x=111，x<0\end{cases}$$

所以 $x=\dfrac{111}{k+1}$ (其中 $k>-1$) 或 $x=\dfrac{111}{k-1}$ (其中 $k<1$)

故當 $-1<k<1$ 時，方程式有兩相異實數解

(1)╳：只有唯一解 $x=37$

(2)╳：只有唯一解 $x=-37$

(3)╳：方程式的解為 $x\le0$，有無限多解

(4)○：$x=74$ 或 -222

(5)○：$x=-74$ 或 222

故選(4)(5)。

9. (1)(3)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：點到直線距離

解析：(1)○：兩弦交點等於兩直線交點 P，即為 $(0,0)$

(2)╳：因為圓心到兩直線距離相等，所以圓心在兩直線之交角的角平分線 $x\pm y=0$ 上

(3)○：兩直線法向量 $(3,-4)$、$(4,-3)$ 的夾角 (θ) 正弦值為 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{(3,-4)\cdot(4,-3)}{5\times5}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}$$

(4)╳：因為圓心在兩直線的角平分線 $x\pm y=0$ 上，所以圓心坐標可能為 $O_1(a,a)$ 或 $O_2(a,-a)$

①當圓心為 $O_1(a,a)$ 時，圓心到直線 $4x-3y=0$ 的距離(弦心距)為 $\left|\dfrac{a}{5}\right|$，

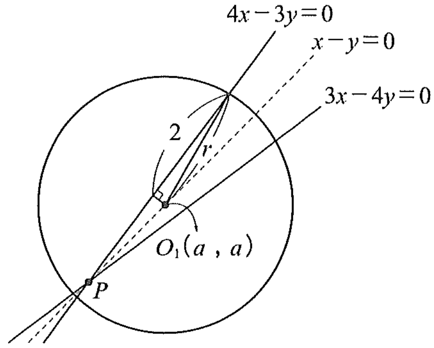
因為半弦長為 2，所以圓半徑 $r=\sqrt{4+\dfrac{a^2}{25}}$，

且因兩弦交點在圓內或圓上，

所以 $\overline{O_1P}=\sqrt{2a^2}\le r=\sqrt{4+\dfrac{a^2}{25}}$

$\Rightarrow a^2\le\dfrac{100}{49}$

$\Rightarrow r^2=4+\dfrac{a^2}{25}\le\dfrac{200}{49}$



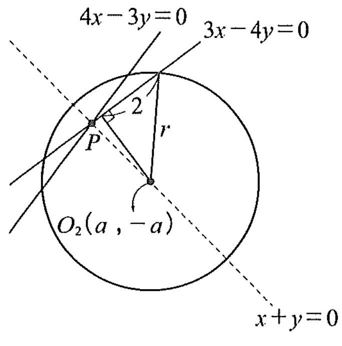
②當圓心為 $O_2(a,-a)$ 時，圓心到直線 $4x-3y=0$ 的距離(弦心距)為 $\left|\dfrac{7a}{5}\right|$，

因為半弦長為 2，所以圓半徑 $r=\sqrt{4+\dfrac{49a^2}{25}}$，

且因兩弦交點在圓內或圓上，

所以 $\overline{O_2P}=\sqrt{2a^2}\le r=\sqrt{4+\dfrac{49a^2}{25}}$

$\Rightarrow a^2\le100\Rightarrow r^2=4+\dfrac{49a^2}{25}\le200$



由①、②得，當圓心為 $(10,-10)$ 或 $(-10,10)$ 時，圓面積有最大值為 200π

(5)○：當弦為直徑時，即圓心為 $P(0,0)$，半徑有最小值 2，圓面積最小值為 4π

故選(1)(3)(5)。

10. (2)(3)(5)

出處：第四冊〈機率〉

目標：利用取捨原理估計機率範圍

解析：令贊成舉辦比賽為事件 A，贊成分組為事件 B

(1)╳：因為 $P(A)>P(B)$，所以一定有同學贊成舉辦比賽但不贊成分組

(2)○：根據題意 $P(A)=0.8$

(3) ○：因為 $1 \geq P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

所以 $P(A \cap B)$ 介於 $P(A)+P(B)-1$ 與 $P(B)$ 之間，

即 $0.4 \leq P(A \cap B) \leq 0.6$

(4) ╳：同(3)，至少為 0.4

(5) ○：承(3)，$P(A' \cap B)=P(B)-P(A \cap B)$ 介於 0 與 0.2 之間

故選(2)(3)(5)。

11. (2)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間兩點經緯度相關性質判斷

解析：(1) ╳：銳夾角先增加再減少

(2) ○：銳夾角保持 60 度

(3) ╳：距離會變化

(4) ╳：距離會變化

(5) ╳：三點在包含東經 10 度的大圓上

故選(2)。

12. (2)(4)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：三次函數圖形對稱中心性質、坐標平移

解析：$y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(0 , 0)$，

因此點 $P'(-r , -s)$ 在函數 $y=f(x)$ 圖形上，

平移後可得點 $(r-3 , s+4)$、$(-r-3 , -s+4)$ 在 $y=g(x)$ 的圖形上

故選(2)(4)。

三、選填題

13. $\dfrac{-1}{4}$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線點 x、y 坐標乘積配方求極值

解析：可假設 $P(x , mx+6)$，則矩形面積為

$$x(mx+6)=mx^2+6x=m\left(x+\frac{3}{m}\right)^2-\frac{9}{m}$$

因為 $m<0$，所以當 $x=-\dfrac{3}{m}$ 時，

面積有最大值 $-\dfrac{9}{m}=36$，求得 $m=\dfrac{-1}{4}$

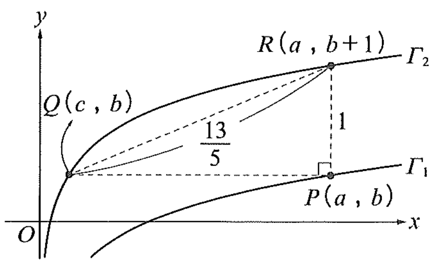
此時 P 坐標為 $(12 , 3)$，位於第一象限。

14. $\dfrac{8}{3}$

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：利用對數運算，計算點坐標值

解析：



點 $Q(c , b)$ 在函數 Γ_2：$y=1+\log x$ 上

$\Rightarrow 1+\log c=b=\log a$，所以 $c=\dfrac{a}{10}$

因為△PQR 是直角三角形，且 $\overline{PR}=1$

所以 $\overline{PQ}=\sqrt{\left(\dfrac{13}{5}\right)^2-1}$

$=\dfrac{12}{5}$

又 $\overline{PQ}=\dfrac{12}{5}=a-c=\dfrac{9a}{10}$

$\Rightarrow a=\dfrac{8}{3}$。

15. $\dfrac{5}{8}$

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率計算

解析：先計算 3 顆骰子之間勝負的機率

① B 勝 A 的機率為 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{12}$

② C 勝 A 的機率為 $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{25}{36}$

乙選到 C 且勝甲(A) 的機率為

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{25}{36}=\dfrac{25}{72}$

乙選到 B 且勝甲(A) 的機率為

$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{12}=\dfrac{5}{24}=\dfrac{15}{72}$

所以 $P(\text{乙選到 } C \mid \text{乙勝})=\dfrac{\dfrac{25}{72}}{\dfrac{15}{72}+\dfrac{25}{72}}=\dfrac{5}{8}$。

16. $(2 , -1)$

出處：第四冊〈矩陣與資料表〉

目標：矩陣乘法、反方陣運算應用

解析：根據題意可得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b \\ a+b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -a+b \\ a-b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

因此 $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=3 \end{cases} \Rightarrow$ 數對 $(a , b)=(2 , -1)$

〈另解〉

利用反方陣計算

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

故數對 $(a , b)=(2 , -1)$

17. $-2x-2$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：多項式函數的一次近似

解析：$y=f(x)$ 對稱中心 x 坐標為 $-\dfrac{b}{3a}=-1$，

所以 $f(x)=2(x+1)^3-3x-5$

$=2(x+1)^3-3(x+1)-2$

$\Rightarrow (x+1)\cdot f(x)=2(x+1)^4-3(x+1)^2-2(x+1)$

$y=(x+1)\cdot f(x)$ 圖形在 $x=-1$ 附近的一次近似為

$y=-2x-2$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (5)

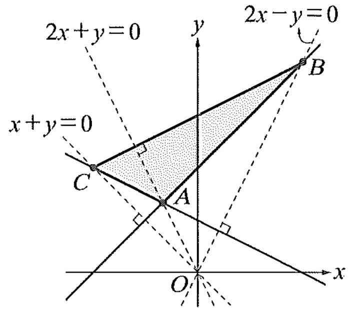
出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：直線的垂直關係、兩直線交點

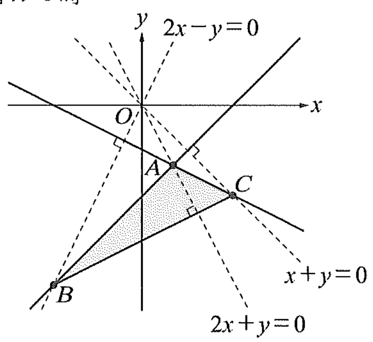
解析：因為直線 AB 垂直直線 OC：$x+y=0$，

所以直線 AB 方程式為 $x-y=3t$

①當 $t<0$ 時：



②當 $t>0$ 時：



點 B 為兩直線 OB、AB 的交點：$\begin{cases}2x-y=0\\x-y=3t\end{cases}$

$\Rightarrow B(x\,,y)=(-3t\,,-6t)$，故選(5)。

19. (2)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量內積判斷角度

解析：因為直線 AC 垂直直線 OB：$2x-y=0$

所以直線 AC 方程式為 $x+2y=-3t$

點 C 為兩直線 OC、AC 的交點：$\begin{cases}x+y=0\\x+2y=-3t\end{cases}$

$\Rightarrow C(x\,,y)=(3t\,,-3t)$

因此 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=t(-4\,,-4)$，

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}==t(2\,,-1)$

$$\Rightarrow \cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|}=\frac{-4t^2}{(4\sqrt{2}t)(\sqrt{5}t)}=\frac{-1}{\sqrt{10}}\approx-\frac{1}{3}$$

故選(2)。

20. $\left(\frac{1}{4}\,,1\right)$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：向量線性組合

解析：先分別求出向量

$\overrightarrow{OA}=t(1\,,-2)$，$\overrightarrow{AB}=t(-4\,,-4)$，

$\overrightarrow{AC}=t(2\,,-1)$

所以 $\overrightarrow{OA}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=t(-4\beta+2\gamma\,,-4\beta-\gamma)$

即 $\begin{cases}-4\beta+2\gamma=1\\-4\beta-\gamma=-2\end{cases}\Rightarrow$ 數對 $(\beta\,,\gamma)=\left(\frac{1}{4}\,,1\right)$。

◎評分原則

先分別求出向量

$\overrightarrow{OA}=t(1\,,-2)$，$\overrightarrow{AB}=t(-4\,,-4)$，　(1 分)

$\overrightarrow{AC}=t(2\,,-1)$　(1 分)

所以 $\overrightarrow{OA}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}=t(-4\beta+2\gamma\,,-4\beta-\gamma)$　(1 分)

即 $\begin{cases}-4\beta+2\gamma=1\\-4\beta-\gamma=-2\end{cases}\Rightarrow$ 數對 $(\beta\,,\gamma)=\left(\frac{1}{4}\,,1\right)$。　(3 分)