111 年學科能力測驗第六次模擬考試
數學 B 考科解析

111-W6

第壹部分、選擇（填）題

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	14-1
(5)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)	(3)(5)	(1)(2)(3)	(2)(3)(5)	(2)(4)	(3)(4)(5)	(1)(2)(4)	1	0	2
14-2	15-1	15-2	15-3	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2						
3	−	1	2	1	0	0	9	2						

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)　19. $2<a<6$　20. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (5)　【難易度】★☆☆

【出處】第三冊 B 週期性數學模型；按比例成長模型

【解析】$\because \sin 1>0$，$\cos 1>0$，$\log 1=0$，$(\frac{1}{2})^{-1}=2$，$\log 2^{-1}=-\log 2<0$

故選(5)

2. (2)　【難易度】★★☆

【出處】第三冊 B 按比例成長模型

【解析】$y=-4(\log_{10}\frac{1}{4})^2-4\log_{10}\frac{1}{4}+5=-4(\log_{10}\frac{1}{4}+\frac{1}{2})^2+6$

$=-4(-2\log 2+\frac{1}{2})^2+6\approx -4(-2\times 0.301+0.5)^2+6$

$=-4\times(-0.102)^2+6>-4+6=2>0$

$\therefore P$ 在第二象限　故選(2)

3. (3)　【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】①每人至多 1 件：分法 $=\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=210$ 種分法

②有一人得 1 本書及 1 支筆：分法 $=C^7_1\cdot\frac{6!}{1!\cdot 2!\cdot 3!}=420$ 種分法

③有二人各得 1 本書及 1 支筆：分法 $=C^7_2\cdot\frac{5!}{1!\cdot 4!}=105$ 種分法

$\therefore$ 共有 $210+420+105=735$ 種分法　故選(3)

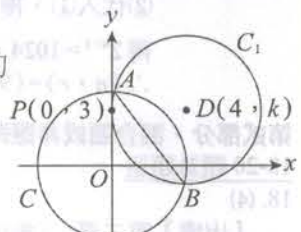
另解：先分書再分筆，並將沒分到的人視為得到另一種相同物

$\therefore$ 分法 $=\frac{7!}{2!\cdot 5!}\cdot\frac{7!}{3!\cdot 4!}=735$　故選(3)

4. (1)　【難易度】★★★

【出處】第一冊 直線與圓

【解析】如右圖，設圓弧為圓 C_1 的一部分



$\because$ 圓 C_1 與圓 C 同大小且與 y 軸相切

$\therefore$ 設圓 C_1 的圓心為 $(4,k)$

$\Rightarrow C_1:(x-4)^2+(y-k)^2=16$

將 $P(0,3)$ 代入

$\Rightarrow 16+(3-k)^2=16\Rightarrow k=3$

$\therefore C_1:(x-4)^2+(y-3)^2=16$

$\because C-C_1:8x+6y-25=0$

此方程式表示圓 C 與圓 C_1 的交集，亦即圓 C 與圓 C_1 的兩交點滿足此方程式

$\therefore$ 直線 AB 的方程式為 $8x+6y-25=0$

$\because m_{OD}=\frac{3}{4}$　$\therefore$ 直線 OD 的方程式為 $3x-4y=0$

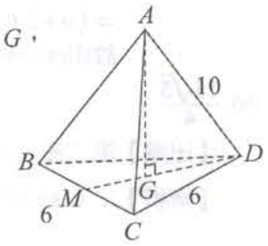
解 $\begin{cases}8x+6y-25=0\\3x-4y=0\end{cases}$ 的交點得中點坐標為 $(2,\frac{3}{2})$

故選(1)

5. (2)　【難易度】★☆☆

【出處】第四冊 B 空間概念

【解析】如右圖：設 A 在平面 BCD 的正射影為 G，且 $\overline{BC}$ 的中點為 M



$\because G$ 為正 $\triangle BCD$ 的重心

$\Rightarrow \overline{DG}=\frac{2}{3}\overline{DM}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{BC}$

$=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 6=2\sqrt{3}$

$\therefore$ 所求 $=\overline{AG}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DG}^2}=\sqrt{100-12}=2\sqrt{22}$

故選(2)

6. (2)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】$\because$ 正方形的對角線互相垂直　$\therefore A$ 與 C 對稱於直線 $y=x$

$\because A(a,b)\Rightarrow C(b,a)$

將此兩點代入 $y=4x-2x^2\Rightarrow\begin{cases}b=4a-2a^2\cdots\cdots①\\a=4b-2b^2\cdots\cdots②\end{cases}$

由 ①－② 得 $b-a=4(a-b)-2(a^2-b^2)$

$\Rightarrow -(a-b)=(a-b)[4-2(a+b)]\Rightarrow -1=4-2(a+b)$

$\therefore a+b=\frac{5}{2}$　故選(2)

二、多選題

7. (3)(5)　【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 數與式

【解析】(1)× $|-3x+5|=|3x-5|\Rightarrow|3x-5|\le 4$

(2)× $|3x+5|\ne|3x-5|$

(3)○ $\because |x-\frac{5}{3}|=\frac{1}{3}|3x-5|\ge\frac{4}{3}\Rightarrow|3x-5|\ge 4$

$\therefore$ 解的範圍相同

(4)× $\because |x-\frac{3}{2}|=\frac{1}{2}|2x-3|\ge 2\Rightarrow|2x-3|\ge 4$

(5)○ $\because |-3x+5|=|3x-5|\ge 4$　$\therefore$ 解的範圍相同

故選(3)(5)

8. (1)(2)(3)　【難易度】★★☆

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】(1)○ 三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

可配方成 $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$ 的形式

而點 (h,k) 為圖形的對稱中心

$\because h=-\frac{b}{3a}=-\frac{-6}{6}=1\Rightarrow k=f(1)=2-6+3-4=-5$

$\therefore$ 對稱中心為 $(1,-5)$

(2)○
$$\begin{array}{rrrr|l}2 & -6 & +3 & -4 & 1\\ & +2 & -4 & -1 & \\ \hline 2 & -4 & -1 & \,\,\,-5 & \\ & +2 & -2 & & \\ \hline 2 & -2 & \,\,\,-3 & & \\ & +2 & & & \\ \hline 2 & +0 & & & \end{array}$$

由綜合除法得 $f(x)=2(x-1)^3-3(x-1)-5$

$\therefore$ 一次近似直線為 $y=-3(x-1)-5=-3x-2$

(3)○ $\because (x_0,y_0)$ 與 $(-x_0+2,-y_0-10)$ 的中點為對稱中心

$\therefore$ 此兩點到近似直線的距離相等

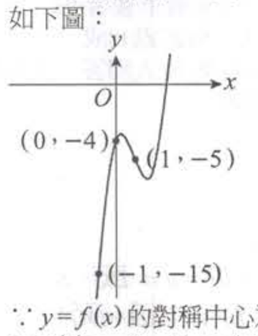
(4)× $\because 2x^3-6x^2$ 經綜合除法後的標準式

$2(x-1)^3-6(x-1)-4$

但 $f(x)=2(x-1)^3-3(x-1)-5$

$\because$ 一次項係數 -6 與 -3 不相等　$\therefore$ 不重合

(5)× 如下圖：



$\because y=f(x)$ 的對稱中心為 $(1,-5)$

$\because f(0)=-4$，且 $x<0$ 時，$f(x)<0$

$\because 0<x<1$ 時，$f(x)=(x-1)[2(x-1)^2-3]-5$
$<(-1)(-3)-5=-2$

$\therefore y=f(x)$ 的圖形在對稱中心的左側與 x 軸無交點

故在對稱中心的右側與 x 軸恰有一交點

故選(1)(2)(3)

9. (2)(3)(5) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 數據分析

【解析】(1)× $\because \sigma^2=\frac{1}{10}[(x_1-8)^2+(x_2-8)^2+\cdots+(x_{10}-8)^2]$

(2)○ $\therefore f(8)=(x_1-8)^2+(x_2-8)^2+\cdots+(x_{10}-8)^2=10\sigma^2$
$=10\cdot 3^2=90$

(3)○ $\because \sigma^2=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-\mu^2$

$\Rightarrow 3^2=\frac{1}{10}(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2)-8^2$

$\therefore x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2=730$

(4)× $\because f(x)=(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_{10}-x)^2$
$=10x^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{10})x+x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_{10}{}^2$

$\because$ 開口向上 $\therefore f(7)>f(8)$

(5)○ 承(4)知：$f(9)>f(8)$

故選(2)(3)(5)

10. (2)(4) 【難易度】★★☆

【出處】第三冊B 平面向量

【解析】(1)× $\because \cos\theta\le 1$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\le|\vec{a}||\vec{b}|$

(2)○ $\because |\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

$(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|+|\vec{b}|^2$

$\because \vec{a}\cdot\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}| \quad \therefore |\vec{a}-\vec{b}|\ge|\vec{a}|-|\vec{b}|$

(3)× $\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}\Rightarrow\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{0} \quad \therefore \vec{a}\perp(\vec{b}-\vec{c})$或$\vec{b}=\vec{c}$

(4)○ 設$\vec{c}=k\vec{b} \quad \therefore \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot k\vec{b}=k\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

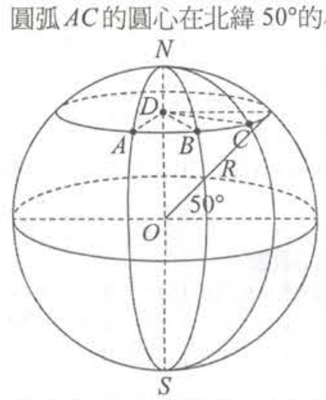
(5)× $\because \vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影$=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$，若$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$，則反向

故選(2)(4)

11. (3)(4)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第四冊B 空間概念

【解析】(1)× 圓弧AC的圓心在北緯 50°的小圓上



(2)× 設北緯 50°的小圓之圓心為D
則$\angle ADB=40°-10°=30° \quad \therefore \angle AOB\ne 30°$

(3)○ $\because$ 均位於北緯 50°上 $\therefore$ 與通過南北極的直線垂直

(4)○ $\because \overline{OA}$與大圓所在的平面的夾角$=50°$
$\therefore$ 直線OA與通過南北極的直線之銳夾角$=90°-50°=40°$

(5)○ 承(4)知：設北極點為N，南極點為$S\Rightarrow\angle AON=40°$
$\because$ 同圓弧所對的圓心角等於兩倍圓周角
$\therefore \angle ASO=20°$

故選(3)(4)(5)

12. (1)(2)(4) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 數據分析

【解析】(1)○ 26～35 歲女性忠實消費者共 39＋53＝92 人為最多

(2)○ 女性忠實消費者共 74＋92＋74＋68＝308 人
男性忠實消費者共 72＋87＋68＋63＝290 人

(3)× 46 歲以上忠實消費者共 63＋68＝131 人為最低

(4)○ 26～35 歲女性忠實消費者 92 人，36～45 歲女性忠實消費者 74 人，皆超過七成

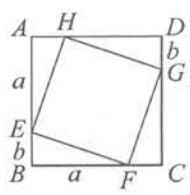
(5)× 16～25 歲女性共 16 人回答「不好吃」或「很不好吃」所占比例最高

故選(1)(2)(4)

三、選填題

13. 10 【難易度】★☆☆

【出處】第三冊B 平面向量



【解析】設$\overline{AE}=a$，$\overline{EB}=b\Rightarrow\overline{BF}=a\Rightarrow\overline{DG}=b$

$\because \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DG})$
$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AD}$
$+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DG}$
$=0+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AD}+0$
$=(a+b)b+a(a+b)=(a+b)^2=10$

$\therefore$ 正方形$ABCD$的面積$=(a+b)^2=10$

14. $\frac{2}{3}$ 【難易度】★☆☆

【出處】第四冊B 機率

【解析】未中獎的條件有三種：

①甲紅＋籤未中$=\frac{3}{4}\times\frac{4}{10}=\frac{3}{10}$

②甲白＋乙紅＋ 籤未中$=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{15}$

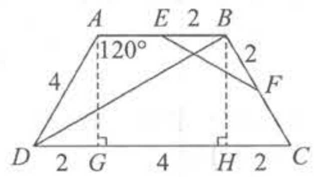
③甲白＋乙白$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$

$$P=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{3}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{12}}=\frac{\frac{18}{60}}{\frac{18+4+5}{60}}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$$

15. -12 【難易度】★☆☆

【出處】第三冊B 平面向量

【解析】如右圖：

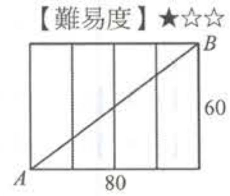


$\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BF})\cdot(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$
$=\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{CD}$
$+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CD}$
$=2\cdot 4\cdot\cos 60°+2\cdot 8\cdot\cos 180°+2\cdot 4\cdot\cos 0°$
$+2\cdot 8\cdot\cos 120°$
$=4-16+8-8=-12$

16. 100 【難易度】★☆☆

【出處】第四冊B 空間概念

【解析】長方體展開如右圖



最短總長$=\overline{AB}$
$=\sqrt{80^2+60^2}$
$=100$

17. (9，2) 【難易度】★★★

【出處】第四冊B 矩陣

【解析】$\because A^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\0&r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1+r\\0&r^2\end{bmatrix}$

$A^3=AA^2=\begin{bmatrix}1&1\\0&r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1+r\\0&r^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1+r+r^2\\0&r^3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^n=\begin{bmatrix}1&1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}\\0&r^n\end{bmatrix}$

$\therefore A^nB=\begin{bmatrix}1&1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}\\0&r^n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+r+r^2+\cdots+r^n\\r^{n+1}\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1023\\1024\end{bmatrix}$

$\Rightarrow\begin{cases}1+r+r^2+\cdots+r^n=1023\\r^{n+1}=1024\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{r^{n+1}-1}{r-1}=1023\cdots\cdots①\\r^{n+1}=1024\cdots\cdots②\end{cases}$

②代入①，得$\frac{1024-1}{r-1}=1023\Rightarrow r=2$，代回②

得$2^{n+1}=1024\Rightarrow n=9$

$\therefore (n，r)=(9，2)$

第貳部分、混合題或非選擇題

18-20 題為題組

18. (4) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 三角比

【解析】$\because$ 三角形較小的兩邊邊長之和大於最大邊

$\therefore a+a+2>a+4\Rightarrow a>2$

$\because a^2+(a+2)^2=(a+4)^2$

$\Rightarrow a^2-4a-12=0\Rightarrow(a+2)(a-6)=0$

$\because a>2 \quad \therefore a=6$

故選(4)

19. $2<a<6$ 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 三角比

【解析】$\because a+a+2>a+4\Rightarrow a>2\cdots\cdots$(a)

$\because a^2+(a+2)^2<(a+4)^2\Rightarrow a^2-4a-12<0$

$\Rightarrow(a+2)(a-6)<0\Rightarrow-2<a<6\cdots\cdots$(b)

故由(a)(b)得$2<a<6$

20. $\frac{15\sqrt{3}}{4}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 三角比

【解析】$\because \cos 120°=\frac{a^2+(a+2)^2-(a+4)^2}{2a(a+2)}=\frac{a^2-4a-12}{2a(a+2)}$

$=\frac{(a+2)(a-6)}{2a(a+2)}=\frac{a-6}{2a}=-\frac{1}{2}$

$\therefore a=3\Rightarrow$ 三邊長為 3，5，7

$\therefore$ 花圃面積$=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 5\cdot\sin 120°=\frac{15\sqrt{3}}{4}$（平方公尺）