數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(2)	(4)	(1)	(5)	(5)	(4)	(2)(3)(4)
8.	9.	10.	11.	12.		
(1)(2)(3)(5)	(2)(3)(4)	(1)(5)	(2)(4)(5)	(1)(2)(3)(4)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

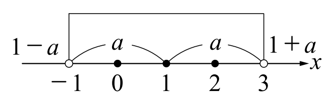
1. (2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：絕對值的計算

解析：$|x-1|<a \Rightarrow 1-a<x<1+a$

區間中恰有三個整數，又 a 為整數



由圖可得 $1+a=3 \Rightarrow a=2$

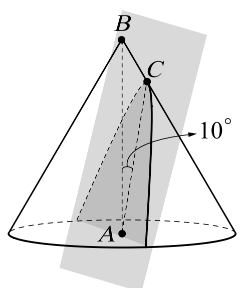
故選(2)。

2. (4)

出處：第四冊〈圓錐曲線的認識與應用〉

目標：圓錐截痕

解析：如下圖，$\angle BAC=10^\circ$，故截痕為雙曲線的一部分



故選(4)。

3. (1)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：熟悉經緯度概念

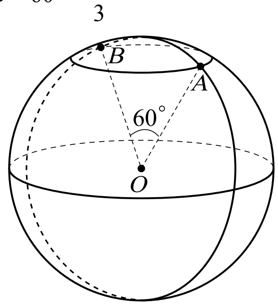
解析：假設北緯 60 度，東經 30 度的點為 A 點

北緯 60 度，西經 150 度的點為 B 點

則 $\overline{AB}$ 為北緯 60 度的直徑

設地球球心為 O

則 $\angle AOB=60^\circ=\frac{\pi}{3}$



故 A、B 兩點的球面距離為

$6371\times\frac{\pi}{3}\approx 6371\times\frac{3.142}{3}\approx 6673$ 公里

故選(1)。

4. (5)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：了解三次函數的對稱中心與一次近似

解析：$\because y=f(x)$ 的圖形在 $x=0$ 附近會近似於直線 $y=5x+2$

$\therefore f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$

$=2(x-0)^3+a(x-0)^2+5(x-0)+2$

$\Rightarrow b=5$ 且 $c=2$

又 $\because y=f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(1, 3)$

$\Rightarrow -\frac{a}{3\times2}=1 \Rightarrow a=-6$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2 & -6 & +5 & +2 & -1 \\
 & -2 & +8 & -13 & \\
\hline
2 & -8 & +13 & -11 & \\
 & -2 & +10 & & \\
\hline
2 & -10 & +23 & & \\
 & -2 & & & \\
\hline
2 & -12 & & &
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=2x^3-6x^2+5x+2$

$=2(x+1)^3-12(x+1)^2+23(x+1)-11$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似為 $y=23(x+1)-11$

$\Rightarrow y=23x+12$，故選(5)。

5. (5)

出處：第二冊〈三角比〉、第三冊〈按比例成長模型〉、第四冊〈矩陣與資料表格〉

目標：二階乘法反方陣的存在條件

解析：因為 B、C 為相異矩陣，若 A 有乘法反方陣

則 $A^{-1}AB=A^{-1}AC \Rightarrow B=C$ (不合)

故 A 的乘法反方陣不存在

(1) ○：因為 $(2, 6)$ 和 $(1, 3)$ 成比例

所以 $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在

(2) ○：因為 $(\sin 60^\circ, \cos 120^\circ)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ 和

$(\sin 240^\circ, \cos 300^\circ)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 成比例

所以 $\begin{bmatrix} \sin 60^\circ & \cos 120^\circ \\ \sin 240^\circ & \cos 300^\circ \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在

(3) ○：因為 $(2^2, 2^8)$ 和 $(2^{-1}, 2^5)$ 成比例

所以 $\begin{bmatrix} 2^2 & 2^8 \\ 2^{-1} & 2^5 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在

(4) ○：因為 $(\log 2, \log 3)$ 和

$(\log 4, \log 9)=(2\log 2, 2\log 3)$ 成比例

所以 $\begin{bmatrix} \log 2 & \log 3 \\ \log 4 & \log 9 \end{bmatrix}$ 的乘法反方陣不存在

(5) ╳：因為 $(\log_2 3, \log_8 9)=\left(\frac{\log 3}{\log 2}, \frac{2\log 3}{3\log 2}\right)$ 和

$(\log_3 2, \log_9 8)=\left(\frac{\log 2}{\log 3}, \frac{3\log 2}{2\log 3}\right)$ 不成比例

所以 $\begin{bmatrix} \log_2 3 & \log_8 9 \\ \log_3 2 & \log_9 8 \end{bmatrix}$ 有乘法反方陣

故選(5)。

6. (4)

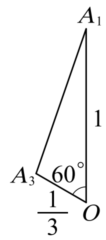
出處：第二冊〈三角比〉

目標：餘弦定理

解析：因為$\triangle A_1B_1C_1$、$\triangle A_2B_2C_2$、$\triangle A_3B_3C_3$為等比例縮小之相似三角形，故$\overline{OA_1}$、$\overline{OA_2}$、$\overline{OA_3}$為一等比數列

其公比為$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，而$\overline{OA_1}=\dfrac{2}{3}(\sqrt{3}\sin 60^\circ)=1$

故$\overline{OA_2}=1\times\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\overline{OA_3}=1\times\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\dfrac{1}{3}$



由$\triangle OA_1A_3$及餘弦定理得

$$\overline{A_1A_3}^2=1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\times1\times\frac{1}{3}\times\cos 60^\circ=\frac{7}{9}$$

$\Rightarrow\overline{A_1A_3}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$，故選(4)。

二、多選題

7. (2)(3)(4)

出處：第四冊〈機率〉

目標：條件機率與獨立事件的應用

解析：設G為近視的事件，且$n(G)=13$

(1)╳：〈解法一〉

n(二男一女)$+n$(一男二女)

$=C^{20}_2C^{10}_1+C^{20}_1C^{10}_2=1900+900=2800$

〈解法二〉

n(任選三人)$-n$(三男)$-n$(三女)

$=C^{30}_3-C^{20}_3-C^{10}_3=4060-1140-120=2800$

(2)○：$p=\dfrac{C^{13}_2}{C^{30}_2}=\dfrac{78}{435}=\dfrac{26}{145}$

(3)○：$P(G\,|\,\text{女})=\dfrac{n(G\cap\text{女})}{n(\text{女})}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

(4)○：$P(\text{女}\,|\,G)=\dfrac{n(G\cap\text{女})}{n(G)}=\dfrac{5}{13}$

(5)╳：$P(A\,|\,G)=\dfrac{5}{13}\neq P(A)=\dfrac{1}{3}$，故$A$、$G$兩事件不獨立

故選(2)(3)(4)。

8. (1)(2)(3)(5)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉

目標：了解週期函數性質與對稱性

解析：(1)○：因為x的係數都是1

∴兩函數的週期相同，都是2π

(2)○：$-1\leq\sin 2x\leq1\Rightarrow-2\leq2\sin 2x\leq2$

$\Rightarrow-1\leq1+\sin 2x\leq3$

∴最大值為3，最小值為-1

(3)○：$y=\sin x$

$\xrightarrow[\pi\text{ 單位}]{\text{向左平移}}y=\sin(x+\pi)$

$=\sin(x+\pi-2\pi)$

$=\sin(x-\pi)$

(4)╳：正弦函數圖形的對稱軸為過最高點或最低點之鉛垂線，當$x=\dfrac{\pi}{2}$時，$y=\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

因為$\left(\dfrac{\pi}{2},0\right)$不是最高點或最低點

故$x=\dfrac{\pi}{2}$非對稱軸

(5)○：當$x=-\dfrac{\pi}{2}$時，$y=\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin(-\pi)=0$

故$\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$為其對稱點

故選(1)(2)(3)(5)。

9. (2)(3)(4)

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：計算百分位數、數據平移伸縮後對於統計量的影響

解析：(1)╳：$Y=100+X\Rightarrow\sigma_X=\sigma_Y$

(2)○：$Z=100+10X$，$W=211+8X\Rightarrow\sigma_Z=\dfrac{5}{4}\sigma_W>\sigma_W$

(3)○：$Z=-900+10Y$，數據伸縮倍率等於$10>0$

$\Rightarrow r_{XY}=r_{XZ}$

(4)○：$20\times75\%=15$

Z的第3四分位數為$\dfrac{z_{15}+z_{16}}{2}=\dfrac{250+260}{2}=255$

$20\times25\%=5$

W的第1四分位數為$\dfrac{w_5+w_6}{2}=\dfrac{251+259}{2}=255$

(5)╳：$20\times13\%=2.6$，$19\times13\%=2.47$

所以移除前後X的第13百分位數皆為第三項3

故選(2)(3)(4)。

10. (1)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：含有相同物的排列方法數；機率與期望值

解析：設移動1格x次，2格y次

依題意得$x+2y=6$，$x\geq0$，$y\geq0$，$x\in\mathbb{Z}$，$y\in\mathbb{Z}$

x	0	2	4	6
y	3	2	1	0
n	3	4	5	6

$n=3\Rightarrow\dfrac{3!}{3!}=1$ (種)，$n=4\Rightarrow\dfrac{4!}{2!2!}=6$ (種)

$n=5\Rightarrow\dfrac{5!}{4!1!}=5$ (種)，$n=6\Rightarrow\dfrac{6!}{6!}=1$ (種)

n	3	4	5	6
P_n	$\frac{1}{13}$	$\frac{6}{13}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{1}{13}$

(1)○：$m=1+6+5+1=13$

(2)╳：$P_3=\dfrac{1}{13}$

(3)╳：$P_4=\dfrac{6}{13}$

(4)╳：$P_4=\dfrac{6}{13}>\dfrac{5}{13}=P_5$

(5)○：$E=3\times\dfrac{1}{13}+4\times\dfrac{6}{13}+5\times\dfrac{5}{13}+6\times\dfrac{1}{13}=\dfrac{58}{13}$

故選(1)(5)。

11. (2)(4)(5)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：圓方程式、直線與圓的相交情形、二元一次聯立不等式的圖形

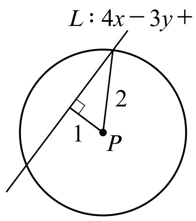
解析：(1) ╳：配方得 $C：(x+1)^2+(y-1)^2=4$

$\Rightarrow$ 圓心 $P(-1\ ,\ 1)$ 且半徑為 2

(2) ○：承(1)，圓 C 的面積為 4π

(3) ╳：承(1)，圓心 P 與直線 L 距離為

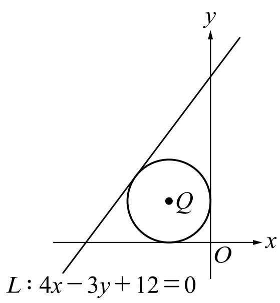
$$\frac{|4\times(-1)-3\times1+12|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{5}{5}=1$$



故所截弦長為 $2\times\sqrt{2^2-1^2}=2\sqrt{3}$

(4) ○：考慮直線 L 與 x 軸和 y 軸的相對位置，可知最小圓會在區域 S

設此圓半徑為 r，圓心 $Q(-r\ ,\ r)$



則 $d(Q\ ,\ L)=\dfrac{|-7r+12|}{5}=r\Rightarrow r=1$ 或 6

故與直線 L、x 軸和 y 軸皆相切的所有圓中，半徑最小為 1

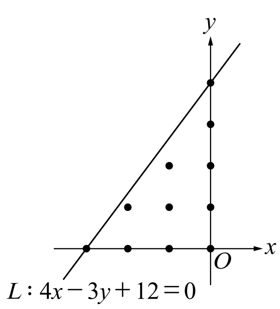
(5) ○：考慮下列的二元一次聯立不等式

$$S：\begin{cases}4x-3y+12\ge 0\\ x\le 0\\ y\ge 0\end{cases}$$

符合的格子點 $(x\ ,\ y)$ 有

$(-3\ ,\ 0)$，$(-2\ ,\ 0)$，$(-2\ ,\ 1)$，$(-1\ ,\ 0)$，$(-1\ ,\ 1)$，$(-1\ ,\ 2)$，$(0\ ,\ 0)$，$(0\ ,\ 1)$，$(0\ ,\ 2)$，$(0\ ,\ 3)$，$(0\ ,\ 4)$

共 11 個，其對應圖形如下



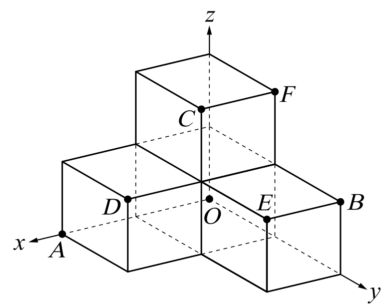
故選(2)(4)(5)。

12. (1)(2)(3)(4)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：空間概念

解析：以 O 為原點建立空間坐標系，則 $A(2\ ,\ 0\ ,\ 0)$



(1) ○：每面皆為 3 個正方形的面積

表面積為 $3\times6=18$ (平方公分)

(2) ○：$B(0\ ,\ 2\ ,\ 1)$

所以 $\overline{AB}=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}=3$ (公分)

(3) ○：$F(0\ ,\ 1\ ,\ 2)$

所以 $\overline{AF}=\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}=3=\overline{AB}$

(4) ○：〈解法一〉

$C(1\ ,\ 1\ ,\ 2)$，$D(2\ ,\ 1\ ,\ 1)$，$E(1\ ,\ 2\ ,\ 1)$

所以頂點 O 到桌面的距離等於原點 O 到△CDE 的重心 $\left(\dfrac{4}{3}\ ,\ \dfrac{4}{3}\ ,\ \dfrac{4}{3}\right)$ 的距離

故頂點 O 到桌面的距離為

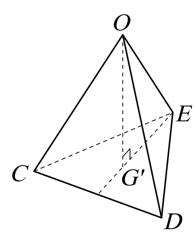
$$\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ (\text{公分})$$

〈解法二〉

四面體 $O-CDE$ 中，底面△CDE 為正三角形

頂點 O 在△CDE 上的投影點為其重心 G'，

$\overline{OG'}\perp$ 平面 CDE



△CDE 中

邊長為 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$$\overline{EG'}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{2}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

△OEG' 中

邊長 $\overline{OE}=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}$

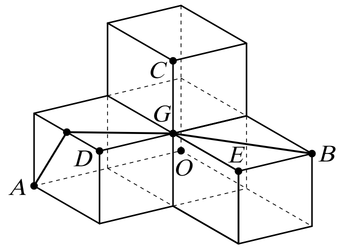
$\overline{EG'}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，且 $\overline{OG'}\perp\overline{EG'}$

$$\overline{OG'}=\sqrt{\overline{OE}^2-\overline{EG'}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2-\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{6-\frac{6}{9}}=\sqrt{\frac{48}{9}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

故頂點 O 到桌面的距離為 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ 公分

(5) ╳：A 點沿模型表面走到 B 點的最短距離等於 A 點沿表面到 G 點的最短距離加 $\overline{GB}$



所以最短距離為

$\sqrt{2^2+1^2}+\sqrt{2}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$

$\approx 2.236+1.414=3.65>3.5$

故選(1)(2)(3)(4)。

三、選填題

13. $\dfrac{3}{7}$

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：常用對數的定義、指數律

解析：$x^2y^3=\sqrt[3]{10000}=\sqrt[3]{10^4}=10^{\frac{4}{3}}$

$2\log x^3y=1\Rightarrow x^3y=10^{\frac{1}{2}}$

$\dfrac{(x^2y^3)^3}{(x^3y)^2}=\dfrac{\left(10^{\frac{4}{3}}\right)^3}{\left(10^{\frac{1}{2}}\right)^2}\Rightarrow y^7=10^3\Rightarrow y=10^{\frac{3}{7}}\Rightarrow \log y=\dfrac{3}{7}$。

14. 400

出處：第二冊〈數列與級數〉

目標：解遞迴關係式並求級數和

解析：分別以 $n=2$，3，……，k 代入得

$a_2=a_1+4$

$a_3=a_2+6$

$a_4=a_3+8$

$\vdots$

$a_k=a_{k-1}+2k$

將式子累加後，得到

$a_k=a_1+4+6+8+\cdots\cdots+2k=2+4+6+8+\cdots\cdots+2k$

$=\dfrac{(2+2k)\times k}{2}=k(k+1)$

即 $a_n=n(n+1)=n^2+n$，且 $a_1=1^2+1=2$ 亦符合

$a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$

$=(5^2+5)+(6^2+6)+(7^2+7)+(8^2+8)+(9^2+9)+(10^2+10)$

$=(5^2+6^2+7^2+8^2+9^2+10^2)+(5+6+7+8+9+10)$

$=〔(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2)-(1^2+2^2+3^2+4^2)〕+45$

$=\dfrac{10\times11\times21}{6}-\dfrac{4\times5\times9}{6}+45=385-30+45=400$。

15. 2520

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：一般排列

解析：根據題意先將「數學」排入課表作討論如下：

①數學排第一節：$1\times6!=720$

②數學排第二、三、四節：$3\times5\times5!=1800$

由①、②得知，共有 $720+1800=2520$ 種排法。

16. 4

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理、餘式定理與因式定理

解析：根據除法原理可得

$f(x)=x(x-1)Q_1(x)+ax+3=x(x+1)Q_2(x)-3x+b$

$=(x^2-1)Q_3(x)-2x+4$

$f(1)=a+3=(-2)\times1+4\Rightarrow a=-1$

$f(0)=0\times a+3=b\Rightarrow b=3$

所以 $g(x)=-x^2+3x+c$

因 $x+1$ 為 $g(x)$ 的因式，所以 $g(-1)=-1-3+c=0$

故 $c=4$。

17. 10

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：圓的切線方程式及點的假設

解析：$x^2+y^2+2x-4=0\Rightarrow(x+1)^2+y^2=5$

圓心 $Q(-1,0)$，半徑 $r=\sqrt{5}$

假設過 $B(4,0)$ 且與圓相切的直線斜率為 m

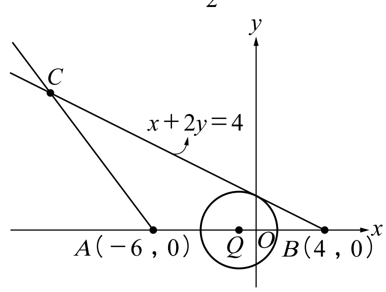
則切線方程式為 $y-0=m(x-4)\Rightarrow mx-y-4m=0$

利用 $d(Q,\text{切線})=\sqrt{5}$，可得 $\dfrac{|-m-4m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow 5(m^2+1)=25m^2\Rightarrow 4m^2=1$

$\Rightarrow m=\pm\dfrac{1}{2}$，其中 $m=\dfrac{1}{2}$ 不合

所以射擊路線為 L：$-\dfrac{1}{2}x-y+2=0\Rightarrow x+2y=4$



設 $C(-6-3t,4t)$，代入 L 可得

$-6-3t+8t=4\Rightarrow t=2$，即 $C(-12,8)$

故 $\overline{AC}$ 的最小值為 $\sqrt{(-6+12)^2+(0-8)^2}=10$。

第貳部分、混合題或非選擇題

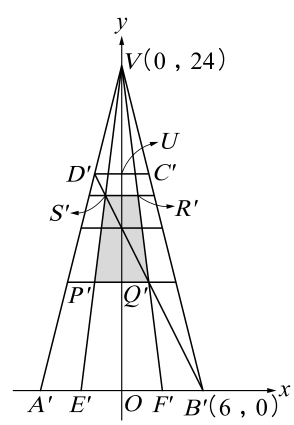
18. (2)

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：直線的垂直關係、直線方程式、消失點的應用

解析：如下圖

點 B' 坐標為 $(6,0)$，點 V 坐標為 $(0,24)$



$\triangle D'VU \sim \triangle A'VO$

$\dfrac{\overline{VU}}{\overline{D'U}}=\dfrac{\overline{VO}}{\overline{A'O}} \Rightarrow \dfrac{8}{\overline{D'U}}=\dfrac{24}{6} \Rightarrow \overline{D'U}=2$

又 $\overline{OU}=24-8=16$

∴點 D' 坐標為 $(-2,16)$

直線 $B'D'$ 為 $y=\dfrac{0-16}{6-(-2)}(x-6) \Rightarrow y=-2x+12$

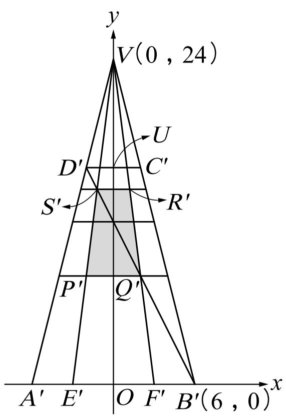
故選(2)。

19. $\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{72}{5}\right)$

出處：第一冊〈直線與圓〉、第三冊〈平面向量與應用〉

目標：兩直線交點、消失點的應用

解析：



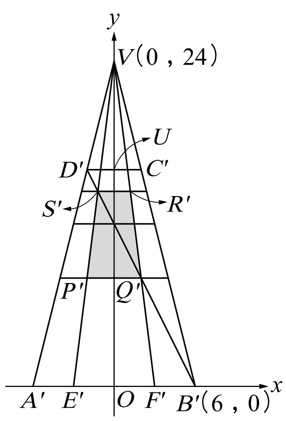
點 E' 坐標為 $(-3,0)$，點 V 坐標為 $(0,24)$

直線 $E'V$ 為 $y-0=\dfrac{24-0}{0-(-3)}(x+3) \Rightarrow y=8x+24$

則 $\begin{cases} y=-2x+12 \\ y=8x+24 \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{6}{5}，y=\dfrac{72}{5}$

$\Rightarrow S'\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{72}{5}\right)$。

◎評分原則



點 E' 坐標為 $(-3,0)$，點 V 坐標為 $(0,24)$

直線 $E'V$ 為 $y-0=\dfrac{24-0}{0-(-3)}(x+3) \Rightarrow y=8x+24$ (2 分)

則 $\begin{cases} y=-2x+12 \\ y=8x+24 \end{cases} \Rightarrow x=-\dfrac{6}{5}，y=\dfrac{72}{5}$

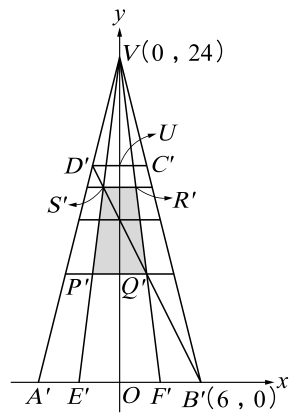
$\Rightarrow S'\left(-\dfrac{6}{5},\dfrac{72}{5}\right)$。 (2 分)

20. $\dfrac{512}{25}$

出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：消失點的應用

解析：



點 F' 坐標為 $(3,0)$

直線 $F'V$ 為 $y-0=\dfrac{24-0}{0-3}(x-3) \Rightarrow y=-8x+24$

則 $\begin{cases} y=-2x+12 \\ y=-8x+24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow Q'(2,8)$

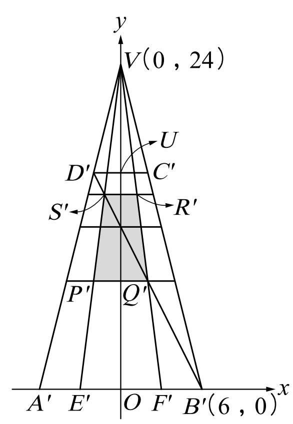
$\overline{S'R'}=2\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5}$，$\overline{P'Q'}=2\times2=4$

直線 $S'R'$ 與 $P'Q'$ 的距離為 $\dfrac{72}{5}-8=\dfrac{32}{5}$

梯形 $P'Q'R'S'$ 面積為

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{12}{5}+4\right)\times\dfrac{32}{5}=\dfrac{512}{25}$ (平方單位)。

◎評分原則



點 F' 坐標為 $(3,0)$

直線 $F'V$ 為 $y-0=\dfrac{24-0}{0-3}(x-3) \Rightarrow y=-8x+24$ (2 分)

則 $\begin{cases} y=-2x+12 \\ y=-8x+24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow Q'(2,8)$ (1 分)

$\overline{S'R'}=2\times\dfrac{6}{5}=\dfrac{12}{5}$ (1 分)，$\overline{P'Q'}=2\times2=4$ (1 分)

直線 $S'R'$ 與 $P'Q'$ 的距離為 $\dfrac{72}{5}-8=\dfrac{32}{5}$ (1 分)

梯形 $P'Q'R'S'$ 面積為

$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{12}{5}+4\right)\times\dfrac{32}{5}=\dfrac{512}{25}$ (平方單位)。 (1 分)