112 年學科能力測驗第六次模擬考試

數學 B 考科解析

112-W6

第壹部分、選擇（填）題

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
(3)	(5)	(3)	(1)	(2)	(4)	(4)	(1)(3)(4)(5)	(1)(2)(4)	(1)(4)(5)	(2)(3)	(3)(4)(5)	3	3	2
14-1	14-2	14-3	15-1	15-2	15-3	15-4	16-1	16-2	16-3	17-1	17-2			
9	2	0	3	0	3	1	5	6	6	−	2			

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (3)　19. (1)(3)(5)　20. 30

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)　【難易度】★☆☆

【出處】第一冊 數與式

【解析】$\frac{-987}{13}$為有理數

$\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{48}}=\frac{6\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{3\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{6}}{2}$為無理數

$\sqrt{17-\sqrt{168}}=\sqrt{17-2\sqrt{42}}=\sqrt{14}-\sqrt{3}$為無理數

$0.9\overline{87}=\frac{987-9}{990}=\frac{978}{990}$為有理數

$\frac{\pi}{3}$為無理數

$\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$為有理數

$\log_2\sqrt{32}=\log_2 2^{\frac{5}{2}}=\frac{5}{2}$為有理數

共有 3 個無理數，故選(3)

2. (5)　【難易度】★☆☆

【出處】第四冊 B 圓錐曲線

【解析】因為牆壁和天花板垂直

所以牆壁和光線所形成的直圓錐面的軸互相平行

所以截痕是雙曲線的一部分

故選(5)

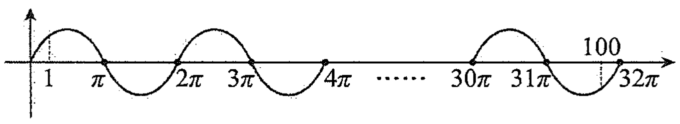
3. (3)　【難易度】★☆☆

【出處】第三冊 B 週期性數學模型

【解析】$\pi \doteqdot 3.14$

$\therefore 31\pi<100<32\pi$

畫圖如下：



共有 31 個交點，故選(3)

4. (1)　【難易度】★★☆

【出處】第四冊 B 按比例成長模型

【解析】設目前業績為N

A計畫一年後業績$=N(1+20\ \%)^4=2.0736N>2N$

B計畫一年後業績$=N(1+10\ \%)^3(1+50\ \%)=1.9965N<2N$

C計畫一年後業績$=N(1+50\ \%)(1+10\ \%)^3=B$計畫

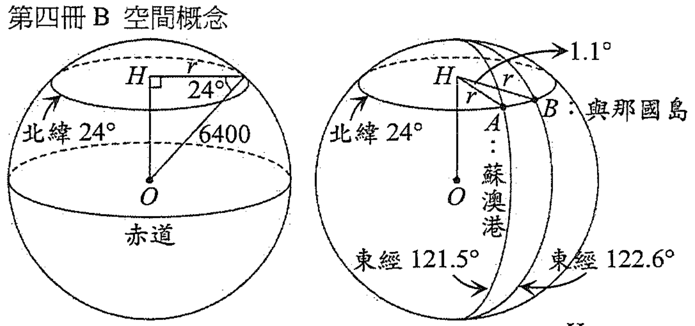
$\therefore$ 僅有A計畫達到目標

故選(1)

5. (2)　【難易度】★★☆

【出處】第四冊 B 空間概念

【解析】

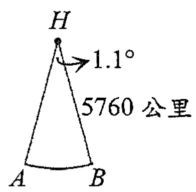


$r=6400\cos 24°=6400\times 0.9=5760$（公里）

$\therefore \overset{\frown}{AB}=2\times 3.1\times 5760\times\frac{1.1}{360}=6.2\times 16\times 1.1$

$=109.12$　最接近 110 公里

故選(2)



6. (4)　【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 數列與級數；第三冊 B 按比例成長模型

【解析】依題意可知：

由左至右的光圈面積形成公比$=\frac{1}{2}$的等比數列

故由左至右的光圈直徑形成公比$=\frac{1}{\sqrt{2}}$的等比數列

設最左光圈直徑$=a_1=1$

$\Rightarrow$ 最右光圈直徑 $a_6=1\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^5=\frac{1}{4\sqrt{2}}\approx\frac{1}{4\times 1.4}=\frac{1}{5.6}$

$\therefore$ 光圈值為 5.6　故選(4)

7. (4)　【難易度】★★☆

【出處】第三冊 B 按比例成長模型

【解析】依題意可得：$\begin{cases} a\log 3+b=48\cdots ① \\ a\log 12+b=72\cdots ② \end{cases}$

② − ①得 $a(\log 12-\log 3)=24\Rightarrow a\cdot\log\frac{12}{3}=24$

$\therefore a=\frac{24}{\log 4}=\frac{24}{2\log 2}\approx\frac{24}{0.6020}\approx 40$

$a\approx 40$代入①得 $40\times\log 3+b=48\Rightarrow b\approx 48-40\times 0.4771\approx 29$

故$y\approx 40\log x+29$

當$x=8$時，$y\approx 40\log 8+29=120\times\log 2+29\approx 65.12$

故選(4)

二、多選題

8. (1)(3)(4)(5)　【難易度】★★☆

【出處】第四冊 B 矩陣

【解析】$AB=\begin{bmatrix}49\\51\end{bmatrix}_{2\times 1}[51\ \ 49]_{1\times 2}=\begin{bmatrix}49\times 51 & 49\times 49\\ 51\times 51 & 51\times 49\end{bmatrix}_{2\times 2}$

$BA=[51\ \ 49]_{1\times 2}\begin{bmatrix}49\\51\end{bmatrix}_{2\times 1}=[51\times 49+49\times 51]_{1\times 1}$

(1)○

(2)×　BA可乘，為1×1方陣

(3)○　AB各元中，最大的數$=51\times 51>50\times 50=2500$

(4)○　AB的第一列　$49\times 51:49\times 49=51:49$

AB的第二列　$51\times 51:51\times 49=51:49$

(5)○　$\because(49\times 51\times 51\times 49)-(49\times 49\times 51\times 51)=0$

$\therefore AB$的乘法反方陣不存在

故選(1)(3)(4)(5)

9. (1)(2)(4)　【難易度】★★☆

【出處】第二冊 數據分析

【解析】(1)○　因為迴歸直線斜率$=0.85>0$

$\therefore r\cdot\frac{\sigma_y}{\sigma_x}>0$　$\therefore r>0$

(2)○　$y=0.85x-80.7$必通過$(158,\mu_y)$

$\Rightarrow\mu_y=0.85\times 158-80.7=53.6$

(3)×　迴歸直線$y=0.85x-80.7$是最接近原始數據的直線，不代表x、y的真實關係，故$\sigma_y\neq 0.85\sigma_x$

(4)○　身高由x公分變成$x+1$公分時

體重變成$0.85(x+1)-80.7=(0.85x-80.7)+0.85$

故體重約增加 0.85 公斤

(5)×　不一定

故選(1)(2)(4)

10. (1)(4)(5)　【難易度】★★☆

【出處】第三冊 B 平面向量

【解析】(1)○　圓內接正n邊形，當n愈大時，圖形面積愈接近圓面積

故圖㈢>圖㈡>圖㈠

(2)×　$c=\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OA}|\cos 60°+|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OB}|\cos 120°$

$+|\overrightarrow{OX}||\overrightarrow{OC}|\cos 180°$

$=1\times 1\times\frac{1}{2}+1\times 1\times(\frac{-1}{2})+1\times 1\times(-1)=-1<0$

(3)× $i_1=\overrightarrow{OX_1}\cdot\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OX_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OX_1}\cdot\overrightarrow{OC_1}$

$=|\overrightarrow{OX_1}||\overrightarrow{OA_1}|\cos 45^\circ+|\overrightarrow{OX_1}||\overrightarrow{OB_1}|\cos 90^\circ$

$+|\overrightarrow{OX_1}||\overrightarrow{OC_1}|\cos 135^\circ$

$=1\times 1\times\frac{\sqrt{2}}{2}+1\times 1\times 0+1\times 1\times(\frac{-\sqrt{2}}{2})=0$

(4)○ $i_2=\overrightarrow{OX_2}\cdot\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OX_2}\cdot\overrightarrow{OB_2}+\overrightarrow{OX_2}\cdot\overrightarrow{OC_2}$

$=|\overrightarrow{OX_2}||\overrightarrow{OA_2}|\cos 30^\circ+|\overrightarrow{OX_2}||\overrightarrow{OB_2}|\cos 60^\circ$

$+|\overrightarrow{OX_2}||\overrightarrow{OC_2}|\cos 90^\circ$

$=1\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}+1\times 1\times\frac{1}{2}+1\times 1\times 0=\frac{\sqrt{3}+1}{2}>0$

(5)○ $|c-i_1|=|-1-0|=1$

$|c-i_2|=|-1-\frac{\sqrt{3}+1}{2}|=\frac{\sqrt{3}+3}{2}>1$

故圖㈡和圖㈠的相似度超過圖㈢和圖㈠的相似度

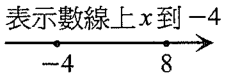
故選(1)(4)(5)

11. (2)(3) 【難易度】★★★

【出處】第一冊 數與式

【解析】將方程式改寫成 $|x-(-4)|+|x-8|=k$

表示數線上 x 到 -4 和 8 的距離和等於 k



由圖可知，

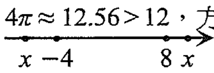
①當 $x>8$ 或 $x<-4$ 時，$|x-(-4)|+|x-8|>12$，即 $k>12$

②當 $-4\le x\le 8$ 時，$|x-(-4)|+|x-8|=12$，即 $k=12$

$\Rightarrow$ 故 $k\ge 12$

(1)× $3\pi\approx 9.42<12$，方程式無解

(2)○ $4\pi\approx 12.56>12$，方程式有解

(3)○  在 $x>8$ 和 $x<-4$ 處各有 1 解

(4)× k 的最小值為 12

(5)× $\because k\ge 12$ $\therefore k=12，13，\cdots，100$ 共有 89 個

故選(2)(3)

12. (3)(4)(5) 【難易度】★★★

【出處】第一冊 多項式函數

【解析】(1)× $h=-\frac{3}{3\times(-1)}=1$，$k=f(1)=3$

$\therefore$ 對稱中心為 $(1，3)$

(2)× 三次函數關係是點對稱，不是線對稱圖形

(3)○ 利用連續綜合除法可將 $f(x)$ 代為 $f(x)=-(x-1)^3+3(x-1)+3$

所以在 $x=1$ 處的一次近似直線方程式為 $y=3(x-1)+3$

即 $y=3x$，會通過原點

$$\begin{array}{rrrr|l}
-1 & +3 & +0 & +1 & 1 \\
 & -1 & +2 & +2 & \\ \hline
-1 & +2 & +2 & +3 & \\
 & -1 & +1 & & \\ \hline
-1 & +1 & +3 & & \\
 & -1 & & & \\ \hline
-1 & +0 & & &
\end{array}$$

(4)○ 當 $x<0$ 時，$-x^3>0$ 恆成立

故 $f(x)=-x^3+3x^2+1>0$ 恆成立

(5)○ 三次多項式函數的圖形和 x 軸的交點個數可能為 1 個、2 個或 3 個

故選(3)(4)(5)

三、選填題

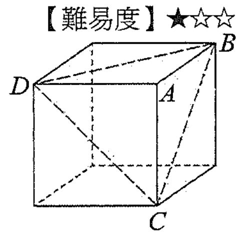
13. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 【難易度】★☆☆

【出處】第四冊 B 空間概念

【解析】$\triangle BCD$ 為正三角形且邊長 $=\sqrt{6}$

$\therefore \triangle BCD$ 面積 $=\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{6})^2$

$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$



14. 920 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】此批零件被接受機率 $=\frac{C^9_2}{C^{10}_2}=\frac{36}{45}=\frac{4}{5}$

故整批退回機率 $=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$\therefore$ 此製造商獲利的期望值為

$10\times(990-700)\times\frac{4}{5}+10\times(-700)\times\frac{1}{5}$

$=2320-1400=920$（元）

15. $\frac{30}{31}$ 【難易度】★☆☆

【出處】第四冊 B 機率

【解析】男生色盲機率 $=\frac{5}{100}=\frac{1}{20}$，女生色盲機率 $=\frac{25}{10000}=\frac{1}{400}$

受檢的 3000 個男生有 $3000\times\frac{1}{20}=150$ 個色盲

受檢的 2000 個女生有 $2000\times\frac{1}{400}=5$ 個色盲

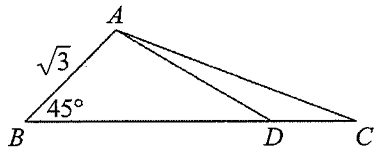
設 A 表示受檢後發現色盲的事件，B 表示色盲者是男生的事件

則 $P(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=\frac{150}{150+5}=\frac{150}{155}=\frac{30}{31}$

16. $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 三角比

【解析】



$\cos\angle ADB=\cos(180^\circ-\angle ADC)=-\cos\angle ADC=\frac{4}{5}$

$\Rightarrow \sin\angle ADB=\frac{3}{5}$

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理知：$\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{\sin\angle ADB}$

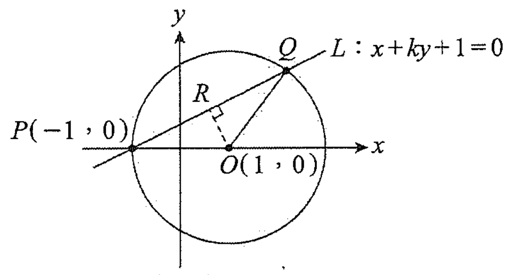
$\therefore \frac{\overline{AD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{\frac{3}{5}}$

解得 $\overline{AD}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$

17. -2 【難易度】★★★

【出處】第一冊 直線與圓

【解析】



圓心 $O(1，0)$，半徑 $=2$

令圓方程式 $(x-1)^2+y^2=4$ 中的 $y=0$

$\Rightarrow (x-1)^2=4\Rightarrow x=3$ 或 -1

$\therefore$ 圓和 x 軸交於 $(3，0)$、$(-1，0)$

直線 $x+ky+1=0$ 必過 $(-1，0)$，

令 $P(-1，0)$

$\overline{OR}=d(O，L)=\frac{|1+k\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+k^2}}=\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}$

$\overline{RQ}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OR}^2}=\sqrt{2^2-(\frac{2}{\sqrt{1+k^2}})^2}=\frac{2|k|}{\sqrt{1+k^2}}\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}$

$\triangle OPR$ 面積 $=\frac{1}{2}\cdot\overline{PQ}\cdot\overline{OR}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4|k|}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{8}{5}$

當 $k>0$ 時，$\frac{k}{1+k^2}=\frac{2}{5}$，解得 $k=2，\frac{1}{2}$

$k<0$ 時，$\frac{-k}{1+k^2}=\frac{2}{5}$，解得 $k=-2，-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 最小 k 值 $=-2$

第貳部分、混合題或非選擇題

18-20 題為題組

18. (3) 【難易度】★☆☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】當每位評審都給 1 顆燈時，總燈數為 5 顆最少。其中 1 位評審給燈從 1 顆改為 2 顆時，總燈數變成 6 顆，依此類推，7、8、9、10 顆都有可能

若每位評審都給 2 顆燈時，總燈數為 10 顆。其中 1 位評審給燈從 2 顆改為 3 顆時，總燈數變成 11 顆，依此類推，11、12、13、14、15 顆都有可能

故參賽者的總燈數可能有 5、6、7、…、14、15 顆，共有 11 種可能，故選(3)

19. (1)(3)(5) 【難易度】★★☆

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】(1)○ 由 18 題可知

(2)×

(3)○ 如果只有 1 位評審給 3 顆燈，則最高總得燈數為 11 顆燈，無法晉級

(4)× $3^5=243$（種）

(5)○ $2\times 2\times 3\times 3\times 3=108$（種）

故選(1)(3)(5)

20. 30 【難易度】★★★

【出處】第二冊 排列組合與機率

【解析】8 顆燈的情形有

①$(3，2，1，1，1)$

共有 $\frac{5!}{3!}=20$（種）

②$(2，2，2，1，1)$

共有 $\frac{5!}{3!\,2!}=10$（種）

故共有 $20+10=30$（種）