

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12-1	12-2	12-3	12-4
2	3	2	4	1	5	245	1345	124	134	35	2	5	1	6
12-5	13-1	13-2	14-1	14-2	14-3	14-4	15-1	15-2	15-3	15-4	15-5	15-6	15-7	16-1
9	3	3	3	3	4	4	2	8	9	1	0	8	9	2
17-1	17-2	18	19	20										
9	2	2	2											

第壹部分、選擇(填)題

一、單選題

1. 【知識點】圓錐曲線

【解析】直圓錐的軸與母線夾角為  $10^\circ < 15^\circ$ ，故為橢圓。故選(2)。

2. 【知識點】弧度量

【解析】

$$\text{時針每分鐘轉 } \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{60} = \frac{\pi}{360}, \text{ 分針每分鐘轉 } \frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30},$$

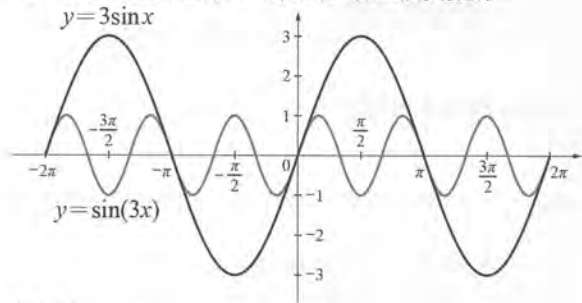
當第一次重疊時，分針比時針多轉  $2\pi$ ，

$$\text{故可得方程式 } \frac{\theta}{\frac{\pi}{360}} = \frac{\theta + 2\pi}{\frac{\pi}{30}} \Rightarrow \theta = \frac{2}{11}\pi.$$

故選(3)。

3. 【知識點】週期性數學模型

【解析】由函數圖形，可得到共有五個實數解。



故選(2)。

4. 【知識點】指數與對數函數

【解析】由  $x$  與  $y$  的關係式為  $y = 8 \log\left(\frac{x}{3}\right)^2$ ，

$$\text{得知 } \left(\frac{x}{3}\right)^2 = 10^{\frac{y}{8}}, \text{ 因此 } \left(\frac{x_1}{3}\right)^2 = 10^{\frac{y_1}{8}}, \text{ 即 } x_1^2 = 9 \times 10^{\frac{y_1}{8}} \dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{又 } \left(\frac{x_2}{3}\right)^2 = \left(\frac{9x_1}{3}\right)^2 = 9x_1^2 = 10^{\frac{y_2}{8}} \dots\dots \textcircled{2}$$

由①、②得知， $10^{\frac{y_2}{8}} = 81 \times 10^{\frac{y_1}{8}}$ ，同取  $\log$  後，

$$\frac{y_2}{8} = \log 81 + \frac{y_1}{8}, \text{ 故 } y_2 = y_1 + 32 \log 3.$$

故選(4)。

5. 【知識點】空間概念

【解析】 $\widehat{AB}$  弧在大圓上的圓心角為  $180^\circ - 24^\circ - 24^\circ = 132^\circ$ ，

$$\text{故所求 } 24\pi \times \frac{132}{360} = \frac{44}{5}\pi.$$

故選(1)。

6. 【知識點】絕對值

【解析】因為此不等式的解，以  $n$  為中心左右對稱，故  $x > n$  時，共有 5 個整數解。

$$\text{且 } \begin{cases} |x-n| < a \\ |x-n| > b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-n < a \\ x-n > b \end{cases}$$

$$\Rightarrow n+b < x < n+a \Rightarrow 4 < a-b \leq 6,$$

故選(5)。

二、多選題

7. 【知識點】數據分析

【解析】

X	1	2	4	8	10
Y	$\sqrt{2}$	2	4	16	32
Z	$\frac{1}{2}$	1	2	4	5

(1)  $\times$ ：由上表可知  $X$ 、 $Z$  為完全正相關其相關係數為 1， $X$ 、 $Y$  的相關係數  $< 1$ 。

(2)  $\circ$ ：由上表可知  $X$ 、 $Z$  為完全正相關。

(3)  $\times$ ：因為  $Z = \log_2 Y$  非線性變換故  $\sigma_Z \neq \log_2 \sigma_Y$ 。

$$(4) \circ : \sigma_x = \sqrt{\frac{1+4+16+64+100}{5} - \left(\frac{1+2+4+8+10}{5}\right)^2} = \sqrt{37-25} = 2\sqrt{3}.$$

(5)  $\circ$ ：由上表可知  $Z=0.5X$ 。

故選(2)(4)(5)。

8. 【知識點】三次函數的圖形特徵

【解析】

(1)  $\circ$ ：因為圖形對稱中心的  $x$  坐標為 2，

$$\text{故 } -\left(\frac{-2a}{3}\right) = 2 \Rightarrow a = 3.$$

(2)  $\times$ ：同(1)，可知  $a = 3$ 。

(3)  $\circ$ ：由綜合除法

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = (x-2)^3 - 3(x-2) - 1,$$

故圖形對稱中心為  $(2, -1)$ 。

(4)  $\circ$ ：當  $b = 4$  時，

$$y = f(x) + g(x) = (x-2)^3 + (4-3)(x-2) = (x-2)^3 + (x-2),$$

故與  $x$  軸恰有一個交點。

(5)  $\circ$ ：當  $b = 1$  時，

$$y = f(x) + g(x) = (x-2)^3 + (1-3)(x-2) = (x-2)^3 - 2(x-2),$$

故與  $x$  軸恰有三個交點。

故選(1)(3)(4)(5)。

9. 【知識點】平面向量

【解析】

(1)  $\circ$ ：由向量加法可得  $\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$ 。

(2)  $\circ$ ：由向量加法可得  $\vec{AF} = 2\vec{AB} + \vec{AL}$ 。

$$(3) \times : \vec{AB} \cdot \vec{AL} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

(4)  $\circ$ ：因為  $\vec{EF}$  垂直  $\vec{AG}$ ，故  $\vec{EF} \cdot \vec{AG} = 0$ 。

$$(5) \times : \vec{AF} \cdot \vec{AG} = (\vec{AE} + \vec{EF}) \cdot \vec{AG} = \vec{AE} \cdot \vec{AG} + \vec{EF} \cdot \vec{AG} = |\vec{AE}|^2 + 0 = 9.$$

故選(1)(2)(4)。

10. 【知識點】數列與級數

【解析】

(1)  $\circ$ ：觀察圖形可以發現，經過  $n$  次步驟後，共有  $2^n$  個線段，故所求為 8。

(2)  $\times$ ：觀察圖形可以發現，經過  $n$  次步驟後，每段線段長  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ ，故所求為  $\frac{1}{243}$ 。

- (3) ○：因為每次步驟皆去除中間三分之一，故線段長的總和會剩下三分之二。
- (4) ○：綜合第(1)、(2)、(3)選項，可得  $E_n = (\frac{2}{3})^n$ ，
- 為公比等於  $\frac{2}{3}$  的等比數列，其中  $E_6 = \frac{64}{729} < \frac{1}{10}$ ，

$$\text{故當 } n \geq 6 \text{ 時， } E_n < \frac{1}{10}。$$

$$\begin{aligned} (5) \times : E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 &= (\frac{2}{3})^1 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{3})^4 + (\frac{2}{3})^5 \\ &= \frac{2}{3} \frac{[1 - (\frac{2}{3})^5]}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{422}{243}。 \end{aligned}$$

故選(1)(3)(4)。

11. 【知識點】排列組合

【解析】令與 9 號同行或同列的集合  $A = \{1, 5, 9, 10, 11, 12, 13\}$ ，其餘號碼為集合  $B = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 14, 15, 16\}$ 。若號碼屬於集合  $A$ ，則 9 號燈泡狀態會發生改變；若號碼屬於集合  $B$ ，則 9 號燈泡狀態不會發生改變。

- (1) ×：因為有二個號碼皆屬於集合  $A$ ，一個號碼皆屬於集合  $B$ ，故狀態會變換二次，即燈泡為熄滅狀態。
- (2) ×：因為三個號碼皆屬於集合  $A$ ，故狀態會變換三次，即燈泡為亮燈狀態。
- (3) ○：因為狀態變換三次，故由集合  $A$  選出三個號碼排列，共有  $P_3^3$  種方法。
- (4) ×：因為僅第一次狀態有發生變換，故第一個號碼由集合  $A$  選出，第二、三個號碼由集合  $B$  選出二個號碼排列，共  $P_1^1 \times P_2^9$  種方法。
- (5) ○：綜合以上選項，共有  $P_3^3 + 3 \times P_1^1 \times P_2^9 = 210 + 3 \times 504 = 1722$  種方法數。
- 故選(3)(5)。

三、選填題

12. 【知識點】圓與直線

【解析】依照題意可得  $A(14, 0)$ 、 $B(14, 10)$ 、 $C(-10, 10)$ ，藍芽耳機收訊範圍為三角形  $ABC$  的外接圓，因為  $\angle B = 90^\circ$ ，故圓心為  $AC$  中點  $(2, 5)$ ，半徑  $= \sqrt{(14-2)^2 + (5-0)^2} = 13$ 。

故所求  $(h, k, m) = (2, 5, 169)$ 。

13. 【知識點】三角比的性質

【解析】由三角形  $AED$  及三角形  $AFD$  利用餘弦定理可得  $ED = FD = \sqrt{6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \cos 60^\circ} = 2\sqrt{7}$ ，再考慮三角形  $EFD$ ，令  $M$  為  $EF$  中點，其中  $EF = 2$ ，則  $EM = 1$ ， $MD = \sqrt{ED^2 - EM^2} = \sqrt{28-1} = \sqrt{27}$ ，三角形  $EFD$  面積  $= \frac{1}{2} EF \times MD = 3\sqrt{3}$ 。

14. 【知識點】矩陣

【解析】已知  $Y = I - X$ ，則  $A = 5X - 2(I - X) = 7X - 2I$ ，

$$\text{所以 } X = \frac{1}{7}(A + 2I) = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}，$$

$$\text{因為 } X^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = X，$$

$$\text{所求 } X^{2024} = X = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}。$$

15. 【知識點】條件機率與貝氏定理  
【解析】

$$P(\text{投擲一次取出數字為奇數}) = \frac{1}{3} + \frac{2}{11} = \frac{17}{33}，$$

$$P(\text{兩數字乘積為奇數}) = \frac{17}{33} \times \frac{17}{33} = \frac{289}{1089}。$$

16. 【知識點】排列組合與機率

【解析】設箱子中紅球共有  $x$  顆，藍球有  $20-x$  顆，店家希望讓玩家每玩 10 次時，店家可以獲得 60 元，因此每玩 1 次，店家可獲利 6 元。

$$E(x) = \frac{20}{40} \times (20-0) + \frac{x}{40} \times (20-20) + \frac{(20-x)}{40} \times (20-100) = 6$$

$$\Rightarrow 10 + 2x - 40 = 6 \Rightarrow x = 18，$$

因此商家需要在球箱中放入藍球共 2 顆。

17. 【知識點】條件機率與貝氏定理

【解析】 $P(\text{確實長有瘰肉} | \text{檢查出長有瘰肉})$

$$= \frac{\frac{1}{30} \times 98\%}{\frac{1}{30} \times 98\% + \frac{29}{30} \times 0.3\%} = 0.91846 \dots \approx 92\%。$$

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【知識點】實數與指對數

【解析】 $200 \text{ 萬} \times (1 + 17.5\%) \times (15\%) = 35.25 \text{ 萬}$ 。  
故選(2)。

19. 【知識點】實數與指對數

【解析】  
<法一>  
 $200 \text{ 萬} \times (1 + 17.5\%) \times (1 + 15\%) \times (1 + 5\%) = 283.7625 \text{ 萬元}$ 。  
<法二>  
① 進口稅  $= 200 \text{ 萬} \times 17.5\% = 35 \text{ 萬}$ 。  
② 貨物稅  $= (200 \text{ 萬} + 35 \text{ 萬}) \times 15\% = 35.25 \text{ 萬}$ 。  
③ 營業稅  $= (200 \text{ 萬} + 35 \text{ 萬} + 35.25 \text{ 萬}) \times 5\% = 13.5125 \text{ 萬}$ 。  
④ 奢侈稅  $= 0$  (關稅完稅價格 + 進口稅 + 貨物稅 + 營業稅  $= 283.7625 \text{ 萬} < 300 \text{ 萬}$ )。  
總計  $= 200 \text{ 萬} + 35 \text{ 萬} + 35.25 \text{ 萬} + 13.5125 \text{ 萬} = 283.7625 \text{ 萬元整}$ 。

故選(2)。

20. 【知識點】實數與指對數

【解析】  
 $200 \text{ 萬} \times (1 + 17.5\%) \times (1 + 30\%) \times (1 + 5\%) = 320.775 \text{ 萬元}$ ，因為 320.775 萬元超過 300 萬元，所以需加課奢侈稅 10%，(2 分)  
故進口車總計  $200 \text{ 萬} \times (1 + 17.5\%) \times (1 + 30\%) \times (1 + 5\%) \times (1 + 10\%) = 352.8525 \text{ 萬}$ ，(3 分)  
差額為  $352.8525 \text{ 萬元} - 283.7625 \text{ 萬元} = 69.09 \text{ 萬元整}$ 。(2 分)