

全國高中 114 年(113 學年度)高三上 第四次聯合模擬考數學 數 B 試題

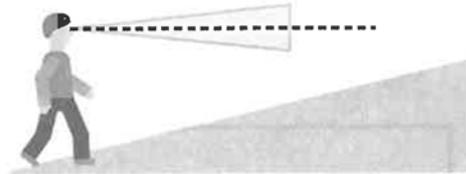
俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 小雞戴著頭燈於夜晚爬山，如圖(1)。已知頭燈的燈光形成直圓錐狀，其直圓錐的軸與母線夾角為 10° ，若小雞的身高為 160 公分，當他走在坡度為 15° 的上坡路且燈光的軸為水平線時，求燈光在坡面上照亮區域所形成的邊界是哪個圓錐曲線的一部分？

- (1)圓
- (2)橢圓
- (3)拋物線
- (4)雙曲線
- (5)條件不足，無法判斷



圖(1)

【114 全國學測模 4】

答：(2)

解：直軸與母線夾 10°
 直軸與截面夾 $10^\circ \Rightarrow$ 拋物線
 $>10^\circ \Rightarrow$ 橢圓
 $<10^\circ \Rightarrow$ 雙曲線

2. 若現在時間為中午 12 點整，經過若干時間後，時鐘上的時針與分針將第一次重疊在一起，試問此時時針與中午 12 點時的時針，所夾之銳角 θ 為多少弧度？

- (1) $\frac{1}{7}\pi$
- (2) $\frac{1}{6}\pi$
- (3) $\frac{2}{11}\pi$
- (4) $\frac{2}{9}\pi$
- (5) $\frac{1}{5}\pi$

【114 全國學測模 4】

答：(3)

解：時針每分鐘轉 $\frac{\pi}{6} \times \frac{1}{60} = \frac{\pi}{360}$ ，分針每分鐘轉 $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$
 當第一次重疊時，分針比時針多轉 2π
 故可得方程式 $\frac{\theta}{\frac{\pi}{360}} = \frac{\theta + 2\pi}{\frac{\pi}{30}} \Rightarrow \theta = \frac{2}{11}\pi$

3. 試問當 $-2\pi \leq x \leq 2\pi$ 時，有多少個實數 x 滿足方程式 $\sin 3x = 3\sin x$ (已知當 $0 < x < \frac{\pi}{6}$ 時，無實數解)。

- (1) 3
- (2) 5
- (3) 7
- (4) 9
- (5) 10 個以上

【114 全國學測模 4】

答：(2)

解：原式 $\Rightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x = 3\sin x \Rightarrow 4\sin^3 x = 0$
 $\xrightarrow{-2\pi \leq x \leq 2\pi} x = -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi$

4. 設 x 與 y 的關係式為 $y = 8\log\left(\frac{x}{3}\right)^2$ ，且當 $x = x_1$ 、 x_2 時，其對應的 y 值分別為 y_1 、 y_2 ，其中 x_1 、 x_2 為正實數，若 $x_2 = 9x_1$ ，則對於 y_1 、 y_2 的關係，試選出正確的選項。
- (1) $y_2 = 9y_1$ (2) $y_2 = 8\log(9y_1)$ (3) $y_2 = 8y_1 - 2\log 3$
 (4) $y_2 = y_1 + 32\log 3$ (5) $y_2 = y_1 + 2\log 3$ 【114 全國學測模 4】

答：(4)

解： $y_2 = 8\log\left(\frac{x_2}{3}\right)^2 = 8\log\left(\frac{9x_1}{3}\right)^2 = 8\left[\log\left(\frac{x_1}{3}\right)^2 + \log 9^2\right]$
 $= y_1 + 8\log 9^2 = y_1 + 32\log 3$

5. 臺灣大約位於東經 120 度北緯 24 度，而在同緯度的地球另一側，即西經 60 度北緯 24 度，恰好為有名的百慕達三角。今有半徑 12 公分的地球儀，令 A 點為東經 120 度北緯 24 度、 B 點為西經 60 度北緯 24 度，試問在球面上 A 、 B 點的最短距離為幾公分？
- (1) $\frac{44}{5}\pi$ (2) $12\pi \times \cos 24^\circ$ (3) $12\pi \times \sin 24^\circ$ (4) 12π (5) 24π

【114 全國學測模 4】

答：(1)

解： \widehat{AB} 弧在大圓上的圓心角為 $180^\circ - 24^\circ - 24^\circ = 132^\circ$

故所求 $24\pi \times \frac{132}{360} = \frac{44}{5}\pi$

6. 不等式 $\begin{cases} |x-n| < a \\ |x-n| > b \end{cases}$ ，其中 n 為整數， a 、 b 為正實數且 $a > b$ 。已知此不等式共有 10 個整數解，試求 $a-b$ 的最大值。
- (1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5 (5) 6 【114 全國學測模 4】

答：(5)

解：因為此不等式的解，以 n 為中心左右對稱，故 $x > n$ 時，共有 5 個整數解

且 $\begin{cases} |x-n| < a \\ |x-n| > b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-n < a \\ x-n > b \end{cases} \Rightarrow n+b < x < n+a \Rightarrow 4 < a-b \leq 6$

二、多選題

7. 在物理及化學實驗中，常常對實驗數據進行函數變換，以方便觀察資料的關係。下表中的 X 、 Y 為原始實驗數據，觀察 Y 的數據後，實驗人員以 $Z = \log_2 Y$ 進行函數變換，試選出正確的選項。

X	1	2	4	8	10
Y	$\sqrt{2}$	2	4	16	32

- (1) X 、 Y 的相關係數等於 X 、 Z 的相關係數
 (2) X 、 Z 為完全正相關
 (3) 令 Y 的標準差為 σ_Y ， Z 的標準差為 σ_Z ，則 $\sigma_Z = \log_2 \sigma_Y$

(4) X 的標準差 σ_X 為 $2\sqrt{3}$

(5) Z 對 X 的最適直線 (迴歸直線) 為 $Z = 0.5X$

【114 全國學測模 ④】

答：(2)(4)(5)

解：

X	1	2	4	8	10
Y	$\sqrt{2}$	2	4	16	32
Z	$\frac{1}{2}$	1	2	4	5

(1) \times ：由上表可知 X 、 Z 為完全正相關，其相關係數為 1， X 、 Y 的相關係數 < 1

(2) \circ ：由上表可知 X 、 Z 為完全正相關

(3) \times ：因為 $Z = \log_2 Y$ 非線性變換，故 $\sigma_Z \neq \log_2 \sigma_Y$

$$(4) \circ : \sigma_X = \sqrt{\frac{1+4+16+64+100}{5} - \left(\frac{1+2+4+8+10}{5}\right)^2} \\ = \sqrt{37 - 25} = 2\sqrt{3}$$

(5) \circ ：由上表可知 $Z = 0.5X$

故選(2)(4)(5)

8. 令三次函數 $f(x) = x^3 - 2ax^2 + 3ax - a$ ，一次函數 $g(x) = b(x-2) + 1$ ，已知 $f(x)$ 的圖形對稱中心的 x 坐標為 2，試選出正確的選項。

(1) $a = 3$

(2) $a = -3$

(3) $f(x)$ 的圖形對稱中心的 y 坐標為 -1

(4) 當 $b = 4$ 時，則方程式 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形與 x 軸恰有一個交點

(5) 當 $b = 1$ 時，則方程式 $y = f(x) + g(x)$ 的圖形與 x 軸恰有三個交點 【114 全國學測模 ④】

答：(1)(3)(4)(5) 此題佳

解： $f(x) = (x-2)^3 + p(x-2) + q = x^3 - 2ax^2 + 3ax - a$

$$\xrightarrow{a=3} f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3 = (x-2)^3 - 3(x-2) - 1$$

$$b=4 \Rightarrow y = f(x) + g(x) = (x-2)^3 + (x-2), \text{ 與 } x \text{ 軸交於一點}$$

$$b=1 \Rightarrow y = f(x) + g(x) = (x-2)^3 - 2(x-2), \text{ 與 } x \text{ 軸交於三點}$$

9. 六角星又名大衛之星，為猶太教的標示之一，因其對稱的美感，也經常出現在許多圖騰上，甚至在 1 美元鈔票上也能找到它的蹤影。如圖(2)，此六角星的六個稜角是邊長為 1 的正三角形所組成，中間則是邊長為 1 的正六邊形，試選出正確的選項。

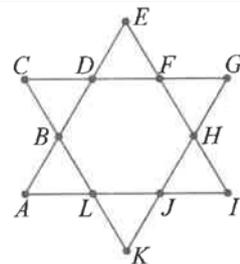
(1) $\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$

(2) $\vec{AF} = 2\vec{AB} + \vec{AL}$

(3) $\vec{AB} \cdot \vec{AL} = 1$

(4) $\vec{EF} \cdot \vec{AG} = 0$

(5) $\vec{AF} \cdot \vec{AG} = 10$



圖(2)

【114 全國學測模 ④】

答：(1)(2)(4)

解：(3) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AL} = 1 \times 1 \times \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

(5) \overline{FM} 中點 $M \Rightarrow \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AG} = |\overrightarrow{AM}| |\overrightarrow{AG}| = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 3\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 4\right) = 9$

10. 康托爾集 (Cantor set) 為德國數學家格奧爾格·康托爾引入，由於具有許多特殊性質，為高等數學常見的範例。生成規則如下：

第一步驟從線段 $[0, 1]$ 去除中間三分之一，留下 $\left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ ，即圖(3)。

第二步驟再去除所有線段中間三分之一，留下 $\left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ ，即圖(4)。不斷重複以上步驟。令 E_n 為經過 n 次步驟後，其集合中所有線段長的總和，試選出正確的選項。

(1) 經過 3 次步驟後，共有 8 個線段

(2) 經過 5 次步驟後，每段線段長度為 $\frac{1}{32}$

(3) E_n 的遞迴關係式為
$$\begin{cases} E_1 = \frac{2}{3} \\ E_n = \frac{2}{3} E_{n-1}, \text{ 當 } n \geq 2 \end{cases}$$

(4) 當 $n \geq 6$ 時， $E_n < \frac{1}{10}$ ，其中 n 為正整數

(5) $E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_5 = \frac{211}{81}$



圖(3)



圖(4)

【114 全國學測模 4】

答：(1)(3)(4)

解：(2) 應為 $\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$

(5) $E_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \Rightarrow \sum_{n=1}^5 E_n = \frac{\frac{2}{3} \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^5\right]}{1 - \frac{2}{3}} = 2 \left[1 - \frac{32}{243}\right] = \frac{422}{243}$

11. 娛樂節目正進行點燈遊戲，其規則如下：在 4×4 方陣內，每格放入編號 1~16 的燈泡，遊戲開始時所有燈泡皆熄滅，如圖(5)所示。當主持人隨機抽取一個號碼後，該號碼及該號碼之同行或同列燈泡，若原為熄燈狀態則點亮，若原為亮燈狀態則熄滅。舉例來說，當主持人抽中 3 號，則 1、2、3、4、7、11、15 號燈泡即亮燈，如圖(6)所示，維持此狀態下再抽中 8 號，則 5、6、8、12、16 號燈泡即亮燈；4、7 號燈泡即熄滅，如圖(7)所示。遊戲開始時，主持人依序隨機抽取 3 個相異號碼後，試選出正確的選項。

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

圖(5)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

圖(6)

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

圖(7)

- (1)若主持人依序抽中 1、10、15，則 9 號燈泡為亮燈狀態
 (2)若主持人依序抽中 5、11、13，則 9 號燈泡為熄滅狀態
 (3)共有 P_3^7 種方法，使得 9 號燈泡在遊戲過程中，先亮燈後又熄滅，最後又亮燈
 (4)共有 $P_1^7 \times C_2^9$ 種方法，使得 9 號燈泡在主持人抽取第 1 個號碼亮燈後，維持亮燈狀態到最後
 (5)共有 1722 種方法數使 9 號燈泡最後為亮燈狀態

【114 全國學測模 4】

答：(3)(5) 此題佳

解：(1)9(暗)→1(亮)→10(暗)→15(暗)

(2)9(暗)→5(亮)→11(暗)→13(亮)

(3)(亮暗亮)⇒ P_3^7

(4)(亮亮亮)⇒ $P_1^7 P_2^9$

(5) $P_3^7 + P_1^7 P_2^9 \times \frac{3!}{2!}$

三、選填題

12. 小鴨不小心將藍芽耳機遺失在一片毫無障礙物的草地上，已知藍芽耳機收訊距離為定值，小鴨找出藍芽耳機的方法如下：以出發地為原點，令東方為正 x 軸、北方為正 y 軸，首先確認藍芽耳機在收訊範圍內，接著向東方前進 14 公尺抵達 A 點後，發現在收訊範圍邊界上。由 A 點向北方走則恢復收訊，且從 A 點往北方前進 10 公尺抵達 B 點後，發現在收訊範圍邊界上。最後由 B 點出發，向西方前進 24 公尺抵達 C 點後，發現在收訊範圍邊界上。以 A 、 B 、 C 三點推算藍芽耳機位置，若藍芽耳機收訊範圍可由不等式

$(x-h)^2 + (y-k)^2 \leq m$ 來表示，試求數組 $(h, k, m) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。 【114 全國學測模 4】

答： $(h, k, m) = (2, 5, 169)$

解： $A(14, 0)$ ， $B(14, 10)$ ， $C(-10, 10)$

因為 $\overline{BA} \perp \overline{BC} \Rightarrow$ 以 \overline{AC} 為直徑 \Rightarrow 圓心 $(2, 5)$ ，半徑 13

13. 令正四面體 $A-BCD$ 邊長為 6，已知點 E 在 \overline{AB} 上，點 F 在 \overline{AC} 上， $\overline{AE} = \overline{AF} = 2$ ，試求三角形 EFD 的面積 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。 【114 全國學測模 4】

答： $3\sqrt{3}$

解： $\overline{DE} = \overline{DF} = \sqrt{2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \cos 60^\circ} = 2\sqrt{7}$ ，又 $\overline{EF} = 2$

取 \overline{EF} 中點 $M \Rightarrow \overline{DM} = \sqrt{(2\sqrt{7})^2 - (1)^2} = 3\sqrt{3}$

ΔDEF 面積 = $\frac{1}{2} \times 2 \times 3\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$

14. 設 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ， X 、 Y 為二階方陣滿足 $X + Y = I_2$ ，其中 I_2 為二階單位方陣，

已知 $A = 5X - 2Y$ ，試求 $X^{2024} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【114 全國學測模 4】

答： $\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

解： 已知 $Y = I - X$ ，則 $A = 5X - 2(I - X) = 7X - 2I$

$$\text{所以 } X = \frac{1}{7}(A + 2I) = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}, \text{ 且 } X^2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = X,$$

$$\text{所求 } X^{2024} = X = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

15. 投擲一個不公正的硬幣，出現正面的機率為 $\frac{2}{3}$ ，反面的機率為 $\frac{1}{3}$ ，若出現正面，則自

1 到 8 的 8 個自然數中任取 1 數，若出現反面，則自 1 至 11 的 11 個自然數中任取 1 數，若投擲硬幣兩次，取出的數字乘積為奇數的機率 = $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

【114 全國學測模 4】

答： $\frac{289}{1089}$

解： $\left[\frac{2}{3} \times \frac{4}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{6}{11} \right]^2 = \left[\frac{17}{33} \right]^2 = \frac{289}{1089}$

16. 便利商店推出年中慶摸摸樂活動，每投 20 元可以玩 1 次，摸彩箱內共有 3 種顏色的球，摸中白球時玩家獲得 0 元，摸中紅球時玩家獲得 20 元，摸中藍球時玩家可獲得 100 元，已知箱子內共有 40 顆球，白球共有 20 顆，若希望讓玩家每玩 10 次，店家期望值可以獲利 60 元，則藍球應擺放 $\underline{\hspace{2cm}}$ 顆。

【114 全國學測模 4】

答： 2

解： $E(X) = 10 \left[-\frac{x}{40} \times 100 - \frac{20-x}{40} \times 20 + 20 \right] = 60 \Rightarrow x = 2$

17. 根據 2022 年國外研究，使用 AI 智慧醫療儀器，協助醫師進行大腸鏡檢查，能夠有效提高瘻肉的偵測率，提前治療有助於降低大腸癌的發生。透過 AI 大腸鏡系統輔助換水大腸鏡檢查，目前瘻肉偵測率（陽性反應）已高達 98%，假陽性誤判率降低至 0.3%，已知 50 - 69 歲成人，每 30 人就有一人有大腸瘻肉，若從此區間的成人中任選 1 人檢查，經 AI 智慧醫療儀器輔佐檢查呈現陽性，則此人腸道中確實有瘻肉的機率為 $\underline{\hspace{2cm}}$ %。

（四捨五入至小數以下第二位）

【114 全國學測模 4】

答： 92%

$$\text{解： } P(\text{確實長有瘰肉} | \text{檢查出長有瘰肉}) = \frac{\frac{1}{30} \times 98\%}{\frac{1}{30} \times 98\% + \frac{29}{30} \times 0.3\%} = 0.91846 \dots \approx 92\%$$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

在臺灣買車，無論進口或是國產車都會發現車價偏高，車價高的原因並非車廠定價過高，而是來自各種稅務的加總，從進口關稅、貨物稅、營業稅等，例如買一輛 2001cc 以上的進口車，需要課上超過六成的稅，相當驚人。

基本上，稅額 = 稅基 × 稅率，稅基為完稅價格。進口汽車之各稅目租稅負擔及稅率如下：

(一) 進口稅 = 關稅完稅價格 × 進口車關稅稅率 (17.5%)。

(二) 貨物稅 = (關稅完稅價格 + 進口稅) × 貨物稅稅率 (25% 或 30%)

進口車排氣量 2,000cc 以下者為 25%；

進口車排氣量 2,001cc 以上者為 30%。

(三) 營業稅 = (關稅完稅價格 + 進口稅 + 貨物稅) × 營業稅稅率 (5%)。

(四) 奢侈稅 = (關稅完稅價格 + 進口稅 + 貨物稅 + 營業稅) × 奢侈稅稅率 (10%)

僅限奢侈稅完稅價格超過 300 萬元者，而

「奢侈稅完稅價格 = 關稅完稅價格 + 進口稅 + 貨物稅 + 營業稅」。

(五) 總計 (進口車含稅成本，不含車商利潤)

= 關稅完稅價格 + 進口稅 + 貨物稅 + 營業稅 + 奢侈稅。

為了達成節能減碳目標，鼓勵民眾購買電動車，2025 年 12 月 31 日前購買完全以電能為動力的新電動小客車，依貨物稅條例第 12 條第 4 項規定及財政公告標準，關稅完稅價格在 140 萬元以下之電動車，免徵貨物稅；關稅完稅價格超過 140 萬元者，貨物稅稅率減半徵收。

(註：電動車排氣量由馬達馬力換算得來)

18. 若欲購買一輛關稅完稅價格為 200 萬元的進口電動車，其排氣量為 2,001cc 以上，試問這輛車要課的貨物稅為何？ (單選題)

- (1) 5.25 萬元 (2) 35.25 萬元 (3) 70.5 萬元 (4) 270.25 萬元 (5) 305.5 萬元

【114 全國學測模 ④】

答：(2)

解：200 萬 × (1 + 17.5%) × (15%) = 35.25 萬

19. 試問一輛關稅完稅價格為 200 萬元的進口電動車，其排氣量為 2,001cc 以上，其含稅成本總計為何？ (單選題)

- (1) 275.25 萬元 (2) 283.7625 萬元 (3) 312.13875 萬元
(4) 320.775 萬元 (5) 352.8525 萬元

【114 全國學測模 ④】

答：(2)

解：200 萬 × (1 + 17.5%) × (1 + 15%) × (1 + 5%) = 283.7625 萬元

解：① 進口稅 = 200 萬 × 17.5% = 35 萬

② 貨物稅 = (200 萬 + 35 萬) × 15% = 35.25 萬

③ 營業稅 = (200 萬 + 35 萬 + 35.25 萬) × 5% = 13.5125 萬

④ 奢侈稅 = 0 (關稅完稅價格 + 進口稅 + 貨物稅 + 營業稅 = 283.7625 萬 < 300 萬)

$$\text{總計} = 200 \text{萬} + 35 \text{萬} + 35.25 \text{萬} + 13.5125 \text{萬} = 283.7625 \text{萬元整}$$

20. 試問欲購買關稅完稅價格同樣為 200 萬元的進口車及進口電動車，其排氣量皆為 2,001cc 以上，兩輛車課完稅後的差額為多少？ 【114 全國學測模 4】

答：69.09 萬元

解： $200 \text{萬} \times (1 + 17.5\%) \times (1 + 30\%) \times (1 + 5\%) = 320.775 \text{萬元}$ ，
因為 320.775 萬元超過 300 萬元，所以需加課奢侈稅 10%，
故進口車總計 $200 \text{萬} \times (1 + 17.5\%) \times (1 + 30\%) \times (1 + 5\%) \times (1 + 10\%) = 352.8525 \text{萬}$
差額為 $352.8525 \text{萬元} - 283.7625 \text{萬元} = 69.09 \text{萬元整}$