北北基 113 學年度學科能力測驗聯合模擬考試數 B(113-E4)

第壹部分：選擇題(占 85 分)


RB430

一、單選題(占 35 分)

1. 設 $f(x)$ 為次數不低於 2 之多項式，若以 $x-1$ 除 $f(x)$，則餘式為 a，商式為 $Q(x)$，再以 $x-2$ 除 $Q(x)$，餘式為 3，若 $f(1)=5f(2)$，則 a 值為下列哪一個選項？
(1) $-\frac{5}{4}$　(2) -5　(3) $-\frac{15}{4}$　(4) -15　(5) 15

2. 在坐標平面上，若直線 L 的方程式為 $y=mx+1$，其中 m 為實數，則直線 L 與下列哪一個圖形必相交？(1) x 軸　(2) $(x-3)^2+(y-1)^2=1$　(3) $y=x$　(4) $x^2+y^2=1$　(5) $(x-1)^2+y^2=1$

3. 設 $\overrightarrow{a}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$，若向量 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 的夾角為 120°，且 $|\overrightarrow{b}|=1$，則 $\overrightarrow{b}$ 可能為下列哪一個選項？(1) $(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$　(2) $(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$　(3) $(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$　(4) $(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$　(5) $(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$

4. 袋中有 12 個球，其中有 3 個白球，9 個黑球，若每球被取出的機會均等，今自袋中任取 3 個球，則取出白球個數的期望值為何？(1) 0.25 個　(2) 0.3 個　(3) 0.5 個　(4) 0.6 個　(5) 0.75 個

5. 在半徑為 10 公分的地球儀上有相異兩點 A、B 都在北緯 45° 上，若 A、B 兩點的球面距離為 $\frac{10\pi}{3}$，且 A 點在東經 20° 上，則 B 點的位置可能在下列哪一個選項？
(1)東經 70°　(2)西經 70°　(3)西經 110°　(4)東經 100°　(5)西經 20°

6. 同學會結束後，四對夫妻排成一列拍照，試問男女間隔且夫妻不相鄰的排法有幾種？
(1) 48 種　(2) 144 種　(3) 288 種　(4) 384 種　(5) 2880 種

7. 國內研究學者吳逸民教授等人(Wu et al，2004)分析 1999 年 921 集集地震的災害紀錄以及中央氣象署的強地動資料，獲得地震震度 F 與最大地表速度 PGV 的關係式為 $F=2.14\times\log(PGV)+1.89$，$PGV$ 的單位為 cm/sec。113 年 4 月 3 日上午 7 點 58 分全臺發生有感地震，臺灣東部外海發生芮氏規模 7.2 的地震，地震深度為 22.5 公里，最大震度 6 級在花蓮縣，而臺北市震度是 5 級，全臺劇烈搖晃。請問花蓮縣的最大地表速度大約是臺北市的最大地表速度的幾倍？(選出最接近的數值)　(1) 1.2 倍　(2) 2 倍　(3) 3 倍　(4) 4 倍　(5) 5 倍

二、多選題(占 25 分)

8. 有 40 位同學參加數學與英文能力檢測(總分皆為 100 分)，考試後主辦單位將每人成績以 $y_1=0.7x_1+30$ 和 $y_2=0.75x_2+25$ 調整後公布，其中 x_1、x_2 分別為每人數學、英文的原始成績，y_1、y_2 分別為每人數學、英文調整後的成績。已知調整後數學與英文成績的算術平均數皆為 60 分，且調整後的數學、英文標準差分別為 14 分、15 分。請選出正確的選項。 (1)每位同學數學的原始成績皆會低於其調整後的成績　(2)此次檢測，數學原始成績的算術平均數比英文原始成績的算術平均數低　(3)數學原始成績的標準差比英文原始成績的標準差低　(4)若數學原始成績與英文原始成績的相關係數為 0.42，則調整後的數學與英文成績的相關係數應低於 0.42　(5)若 A 同學調整後的數學成績比調整後的英文成績高，則 A 同學的數學原始成績必高於英文原始成績

9. 小明一個人玩跳格子的遊戲，格子如右圖所示，他決定投擲一枚均勻硬幣，丟到正面向右跳 1 格，丟到反面向左跳 1 格，但若選到的方向會跳出格子以外，就停在原格子中。假設他的初始位置在 B，令投擲 n 次硬幣後，小明停留在 A、B、C 的機率分別為 a_n、b_n、c_n，請選出正確的選項。

A	B	C

(1) $b_1=\frac{1}{3}$　(2) $b_2=\frac{1}{2}$　　(3) $a_4=c_4$　(4) $b_n=a_{n-1}+c_{n-1}$　(5) $b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(1-b_n\right)$

10.設 $P\left(a\pi,b\right)$ 為兩函數 $y=\log x$ 和 $y=\sin x$ 在區間 $\left[0,2\pi\right]$ 內之交點，其中 π 為圓周率，a 、 b 為實數，請選出正確的選項。　(1) $0<a+b<3$　(2) $\left(b,a\pi\right)$ 為函數 $y=(\frac{1}{10})^x$ 圖形上一點　(3) $(\frac{1}{a\pi},-b)$ 為函數 $y=\log x$ 圖形上一點　(4) $\left(\pi,b\right)$ 為函數 $y=\sin x$ 以原點為中心水平伸縮 a 倍後圖形上一點　(5) $\left(a\pi,-b\right)$ 為函數 $y=\sin x$ 向左平移 π 單位後圖形上一點

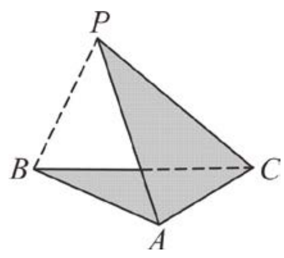
11.擲筊是利用兩個半月形的木頭筊杯，透過將筊杯擲出，根據落地後兩個筊杯的正反方向，預測事情。根據筊杯的正反可分成以下三種狀況：第一種為一正一反，又名「聖杯」；第二種為兩正面，又名「笑杯」；第三種為兩反面，又名「無杯」。某人持木頭筊杯，若擲出聖杯表「成功」，無杯表「失敗」就不再擲，若得笑杯，則再擲第二次，直到「成功」或「失敗」才停止。若每一個筊杯正、反面出現機會皆相等，且每次擲筊情況不會互相影響，請選出正確的選項。　(1)擲筊情形共有「聖杯」、「笑杯」、「無杯」三種情況，所以第一次就擲出「聖杯」的機率為 $\frac{1}{3}$　(2)第五次才擲出「聖杯」的機率為 $\frac{1}{512}$　(3)三次以內擲出「聖杯」的機率為 $\frac{7}{8}$　(4)在五次以內擲出「聖杯」的條件下，三次以內就擲出「聖杯」的機率為 $\frac{16}{341}$　(5)若長年擲筊使得木頭筊杯受損，造成兩個筊杯正、反面出現機率變成每過一年其中一個的正面出現機率增加 0.01、另一個的反面機率增加 0.01，則 30 年後擲筊一次就擲出「聖杯」的機率會超過六成

12.已知空間中有相異兩點 $A\left(-1,1,2\right)$ 、 $B\left(3,-2,4\right)$ ，請選出正確的選項。(1) A 點對 x 軸的投影點為 $\left(-1,0,0\right)$ (2) A 點到 y 軸的距離小於 2　(3) A 點對 xy 平面的對稱點為 $\left(-1,1,-2\right)$ (4) A 點對原點的對稱點為 $\left(1,-1,-2\right)$　(5)若 P 點在 x 軸上，使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值，此時 P 點坐標為 $\left(\frac{1}{3},0,0\right)$

三、選填題(占 25 分)

13.已知三次函數 $y=f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似函數為 $y=x-2$ ，其大域特徵和 $y=2x^3$ 接近，又 $f\left(1\right)=7$ ，試求序組 $\left(a,b,c,d\right)=$________ 。

14.有一邊長為 2 的菱形，其中一條對角線 $\overline{AC}$ 的長亦為 2，沿此對角線對摺形成一個四面體 $PABC$ ，如右圖所示，已知四面體體積公式為「$\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高 」，則此四面體的最大體積為________ 。



15.坐標平面上一圓C與x軸相切於$(3,0)$，且在$y\le 0$時與直線L：$3x-4y-4=0$也相切，則此圓的方程式為$x^2+y^2+dx+ey+9=0$，求數對$(d,e)=$________。

16.形如2^n-1的數(n為正整數)被稱為梅森數，命名來自西元十七世紀的法國數學家馬蘭・梅森，如果梅森數是質數就稱為梅森質數。古希臘數學家歐幾里德(Euclid)約在西元前三百年證明「質數有無限多個」，但至今數學家仍不知梅森質數是否也有無限多個。1952 年美國利用電子計算機改革了梅森質數的尋找過程，發現了$2^{521}-1$是梅森質數，請計算出$2^{521}-1$是________位數。

17.已知$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ c & d\end{bmatrix}$，若矩陣$A$存在乘法反方陣$A^{-1}$，且$A^{-1}=A$，則$c+d=$________。

第貳部分：混合題或非選擇題（占15分）

18-20 題為題組

【某報訊】藍牙耳機掉一隻怎麼找？東大生用數學找回

根據日媒《maidonanews》報導，一名東京大學的學生近日走在校園時，不小心掉了其中一隻耳機，但他隨即想到「藍牙耳機發出的訊號是圓形的」，可以利用高中數學所學的知識推算出掉耳機的地方。有天曉華的手機掉了，也想如法炮製東大生在社群平臺分享找尋藍牙耳機的方法，他利用藍牙連線系統做了以下嘗試。

18.曉華朝一直線前進，試圖尋找藍牙耳機發出的訊號，在通過此直線上的A點之後，他開始接收到訊號(稱收到訊號的點為接點)，而在通過此直線上的B點之後開始接收不到訊號(形成斷線)，則他利用高中數學所學的知識會知道下列何者？(單選題，4 分)

(1)藍牙耳機一定在A點　(2)藍牙耳機一定在B點　(3)藍牙耳機一定在$\overline{AB}$中點

(4)藍牙耳機一定在$\overline{AB}$的中垂線上　(5)無法確定藍牙耳機在哪一個位置

19.承 18.題，曉華分別找到三個藍牙在接收與斷線間的接點A、B、C，連成一個三角形ABC，他利用餘弦定理算出$\cos A$的值為負數，根據高中數學所學的知識知道下列哪些正確？(多選題，5 分)

(1)藍牙耳機在三角形ABC的內部　(2)藍牙耳機在三角形ABC的外部

(3)藍牙耳機在三角形ABC的邊上　(4)藍牙耳機一定在直線BC的外側(與A點異側)

(5)藍牙耳機一定在直線BC的內側(與A點同側)

20.承 19.題，曉華將三角形ABC的三邊長度計算出來，分別是 3 公尺、5 公尺、7 公尺，他利用高中數學所學的知識找到藍牙耳機所在的位置O點，請算出$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$為多少公尺？

參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\ \sqrt{3}\approx 1.732,\ \sqrt{5}\approx 2.236,\ \sqrt{6}\approx 2.449,\ \sqrt{10}\approx 3.162$。

指對數值：$\log_{10}2\approx 0.3010,\ \log_{10}3\approx 0.4771,\ \log_{10}5\approx 0.6990,\ \log_{10}7\approx 0.8451$。

RB430　北北基 113 學年度學科能力測驗聯合模擬考試數 B(113-E4)

參考答案

選擇題：**1.** (3)　**2.** (4)　**3.** (2)　**4.** (5)　**5.** (2)　**6.** (2)　**7.** (3)　**8.** (2)　**9.** (2)(3)(5)
10. (1)(3)(5)　**11.** (2)(5)　**12.** (1)(3)(4)(5)

選填題：**13.** $(2,4,3,-2)$　**14.** 1　**15.** $(-6,10)$　**16.** 157　**17.** -1

混合題或非選擇題：**18.** (4)　**19.** (2)(4)　**20.** $7\sqrt{3}$