數學 B 考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(3)	(4)	(2)	(5)	(2)	(2)	(3)
8.	9.	10.	11.	12.		
(2)	(2)(3)(5)	(1)(3)(5)	(2)(5)	(1)(3)(4)(5)		

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：除法原理與餘式定理

解析：$\because f(x)=(x-1)Q(x)+a \quad \therefore f(1)=a$

又 $Q(2)=3$ 且 $f(1)=5f(2)$

$\Rightarrow a=5〔(2-1)Q(2)+a〕=15+5a$

$\Rightarrow a=-\dfrac{15}{4}$

故選(3)。

2. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：評量直線與圓的圖形概念

解析：L 為恆過 $(0,1)$ 的直線

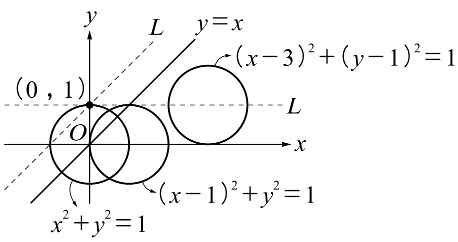
(1) $m=0$ 時與 x 軸不相交

(2)如下圖，$(x-3)^2+(y-1)^2=1$ 為圓心 $(3,1)$，半徑為 1 之圓，與 L 可能不相交

(3) $m=1$ 時與 $y=x$ 平行不相交

(4)如下圖，$x^2+y^2=1$ 為圓心 $(0,0)$，半徑為 1 之圓，圖形通過 $(0,1)$

(5)如下圖，$(x-1)^2+y^2=1$ 為圓心 $(1,0)$，半徑為 1 之圓，與 L 可能不相交



故選(4)。

3. (2)

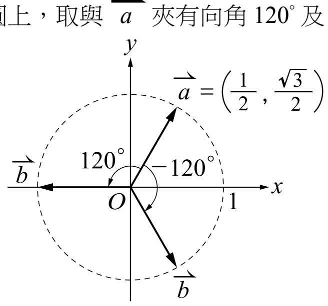
出處：第三冊〈平面向量與應用〉

目標：評量平面向量的推理能力

解析：〔解法一〕

如下圖所示，

單位圓上，取與 $\overrightarrow{a}$ 夾有向角 120° 及 -120°，



可得 $\overrightarrow{b}=(-1,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，故選(2)。

〔解法二〕

設 $\overrightarrow{b}=(x,y)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos120^\circ\\ |\overrightarrow{b}|=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-\sqrt{3}y-1\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\ x^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

①代入②得

$(-\sqrt{3}y-1)^2+y^2=1$

$\Rightarrow 2y^2+\sqrt{3}y=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=0\\ x=-1\end{cases} 或 \begin{cases}y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

即 $\overrightarrow{b}=(-1,0)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

故選(2)。

4. (5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：排列組合、機率、期望值

解析：

取得白球個數	0	1	2	3
機率	$\dfrac{C^9_3}{C^{12}_3}$	$\dfrac{C^3_1\times C^9_2}{C^{12}_3}$	$\dfrac{C^3_2\times C^9_1}{C^{12}_3}$	$\dfrac{C^3_3}{C^{12}_3}$

所求期望值為

$0\times\dfrac{84}{220}+1\times\dfrac{108}{220}+2\times\dfrac{27}{220}+3\times\dfrac{1}{220}$

$=\dfrac{165}{220}$

$=0.75$ (個)

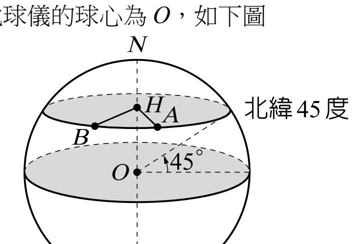
故選(5)。

5. (2)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：評量空間概念中球面上經緯度的觀念

解析：設地球儀的球心為 O，如下圖

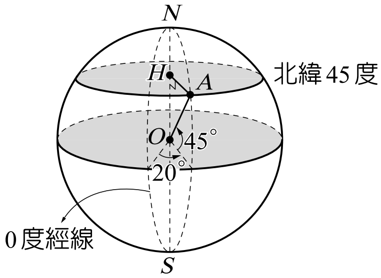


設通過大圓的圓心角 $\angle AOB=\theta$，

$s=r\theta \quad \therefore \dfrac{10\pi}{3}=10\times\theta\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{3}$，

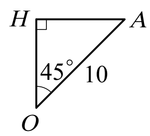
$\triangle OAB$ 為正三角形 $\quad\therefore \overline{AB}=10$

設北緯 45° 的小圓的圓心為 H



如上圖

$\therefore \angle HOA = 45^\circ$ 且 $\overline{AH} \perp \overline{OH}$



$\Rightarrow \overline{AH} = 5\sqrt{2}$ (北緯 45° 的小圓半徑)

$\triangle AHB$ 中，

$\overline{AB} = 10$，$\overline{AH} = \overline{BH} = 5\sqrt{2}$

$\therefore \angle AHB = 90^\circ$

因此，B 點所在位置為東經 $20^\circ \pm 90^\circ$，

即東經 110° 或西經 70°

故選⑵。

6. ⑵

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：理解情境與條件限制，窮舉討論所有情況

解析：設四對夫妻分別為 Aa、Bb、Cc、Dd

① 先生先排 $4! = 24$，若其中一種情況為 $ABCD$，如下圖所示

	❶					❷			
	A	B	C	D		A	B	C	D
d	a	b	c		c	d	a	b	
c	d	a	b		d	c	a	b	
c	d	b	a		b	c	d	a	

② 太太插空隙，且不與自己先生相鄰，則

❶ 男女男女間隔排有 3 種情況

❷ 女男女男間隔排亦為 3 種情況

$\therefore 4! \times (3+3) = 144$ 種排法

故選⑵。

7. ⑶

出處：第三冊〈按比例成長模型〉

目標：理解題目中的關係式，並運用指對數運算估算出答案

解析：設花蓮縣的最大地表速度為 x cm / sec，

臺北市的最大地表速度為 y cm / sec

依題意可得 $\begin{cases} 6 = 2.14 \times \log x + 1.89 \cdots\cdots ① \\ 5 = 2.14 \times \log y + 1.89 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①－②得 $1 = 2.14 \times (\log x - \log y) \Rightarrow \dfrac{1}{2.14} = \log \dfrac{x}{y}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{y} = 10^{\frac{1}{2.14}} = 10^{\frac{100}{214}} = 10^{\frac{50}{107}}$

$\approx 10^{0.47} \approx 10^{0.4771} \approx 10^{\log 3} = 3$

故選⑶。

二、多選題

8. ⑵

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：能理解各統計量的性質

解析：⑴ ╳：反例：若某生原始成績為 100 分，

則調整後的成績亦為 100 分

⑵ ○：$60 = 0.7\mu_{x_1} + 30 \Rightarrow \mu_{x_1} \approx 42.86$

$60 = 0.75\mu_{x_2} + 25 \Rightarrow \mu_{x_2} \approx 46.67$

∴英文原始成績的算術平均數較高

⑶ ╳：$14 = 0.7 \times \sigma_{x_1} \Rightarrow \sigma_{x_1} = 20$

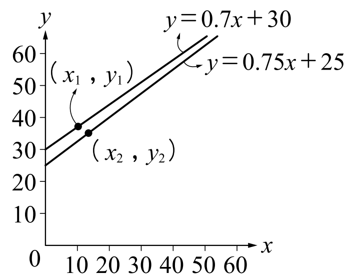
$15 = 0.75 \times \sigma_{x_2} \Rightarrow \sigma_{x_2} = 20$

∴數學原始成績的標準差等於英文原始成績的標準差

⑷ ╳：$\because y_1 = 0.7x_1 + 30$ 且 $y_2 = 0.75x_2 + 25$

$\therefore r_{y_1, y_2} = r_{x_1, x_2} = 0.42$

⑸ ╳：不一定，如下圖所示，此時 $y_1 > y_2$，但 $x_1 < x_2$



故選⑵。

9. ⑵⑶⑸

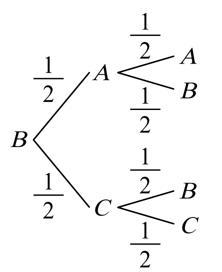
出處：第二冊〈數列與級數〉、第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能利用遞迴方式表示發生的機率，並能求出事件發生的機率結果

解析：⑴ ╳：初始位置在 B 時，投擲 1 次硬幣後不會停留在 B，只可能停留在 A 或 C

$\therefore b_1 = 0$

⑵ ○：



$\therefore b_2 = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

⑶ ○：$\because a_1 = c_1 = \dfrac{1}{2}$

且 $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n + \dfrac{1}{2} a_n \cdots\cdots ① \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{2} b_n + \dfrac{1}{2} c_n \cdots\cdots ② \end{cases}$

①－②得 $a_{n+1} - c_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n - c_n)$

$a_2 - c_2 = \dfrac{1}{2}(a_1 - c_1) = 0$

$\therefore a_2 = c_2$

$a_3 - c_3 = \dfrac{1}{2}(a_2 - c_2) = 0$

$\therefore a_3 = c_3$

$a_4 - c_4 = \dfrac{1}{2}(a_3 - c_3) = 0$

$\therefore a_4 = c_4$

⑷ ╳：$b_n = \dfrac{1}{2} \times a_{n-1} + \dfrac{1}{2} \times c_{n-1}$

(5) ○：$\because a_n+b_n+c_n=1$

$\therefore b_{n+1}=\dfrac{1}{2}\times a_n+\dfrac{1}{2}\times c_n$

$=\dfrac{1}{2}(a_n+c_n)=\dfrac{1}{2}(1-b_n)$

故選(2)(3)(5)。

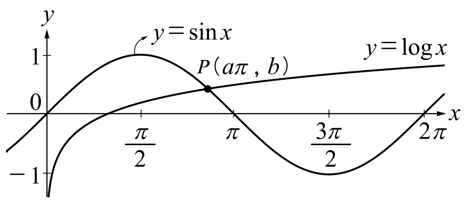
10. (1)(3)(5)

出處：第三冊〈正弦函數與週期性現象〉、

第三冊〈按比例成長模型〉

目標：理解對數函數及正弦函數之圖形及圖形伸縮平移

解析：



(1) ○：如上圖所示，$\dfrac{1}{2}<a<1$，$0<b<1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}<a+b<2$

(2) ╳：$b=\log a\pi \Rightarrow a\pi=10^b$，

故 $(b\,,a\pi)$ 為函數 $y=10^x$ 圖形上一點

(3) ○：$b=\log a\pi \Rightarrow 10^b=a\pi$

將 $x=\dfrac{1}{a\pi}$ 代入 $y=\log x$ 得 $y=\log\dfrac{1}{a\pi}$

$\Rightarrow 10^y=\dfrac{1}{a\pi}=(a\pi)^{-1}=(10^b)^{-1}$

$\therefore y=-b$

故 $\left(\dfrac{1}{a\pi}\,,-b\right)$ 為函數 $y=\log x$ 圖形上一點

(4) ╳：$y=\sin x$ 水平伸縮 a 倍後為 $y=\sin\dfrac{1}{a}x$

∵已知 $(a\pi\,,b)$ 在 $y=\sin x$ 圖形上

$\therefore b=\sin a\pi$……(＊)

再檢查 $(\pi\,,b)$ 是否在 $y=\sin\dfrac{1}{a}x$ 圖形上，

將 $x=\pi$ 代入得 $y=\sin\dfrac{1}{a}\pi$

由 (＊) 知 $b=\sin a\pi\neq\sin\dfrac{1}{a}\pi$

(5) ○：$y=\sin x$ 向左平移 π 單位後為 $y=\sin(x+\pi)$

將 $x=a\pi$ 代入 $y=\sin(x+\pi)$ 得

$y=\sin(a\pi+\pi)=-\sin a\pi=-b$

故 $(a\pi\,,-b)$ 為 $y=\sin(x+\pi)$ 圖形上一點

故選(1)(3)(5)。

11. (2)(5)

出處：第二冊〈排列組合與機率〉、第四冊〈機率〉

目標：條件機率的應用

解析：(1) ╳：$P(\text{聖杯})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

$P(\text{笑杯})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

$P(\text{無杯})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

(2) ○：$P(\text{第五次才擲出聖杯})$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{1}{512}$

(3) ╳：$P(\text{三次以內聖杯})=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}$

$=\dfrac{21}{32}$

(4) ╳：$P(\text{三次以內聖杯}\mid\text{五次以內聖杯})$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\frac{1}{2}}$$

$=\dfrac{336}{341}$

(5) ○：$P(30\text{ 年後聖杯})$

$=(0.5+0.01\times30)\times(0.5+0.01\times30)$

$+(0.5-0.01\times30)\times(0.5-0.01\times30)$

$=0.8\times0.8+0.2\times0.2$

$=0.68>0.6$

故選(2)(5)。

12. (1)(3)(4)(5)

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：評量空間概念中投影點、距離公式的觀念

解析：(1) ○

(2) ╳：A 點對 y 軸的投影點為 $(0\,,1\,,0)$

$d(A\,,y\text{ 軸})=\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}>2$

(3) ○：A 點對 xy 平面的投影點為 $(-1\,,1\,,0)$，

A 點和對稱點的中點坐標為 $(-1\,,1\,,0)$

∴對稱點為 $(-1\,,1\,,-2)$

(4) ○

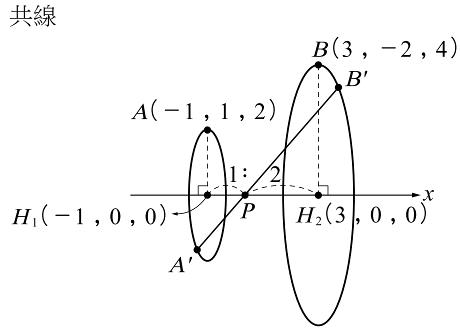
(5) ○：A 點對 x 軸作投影點 $H_1(-1\,,0\,,0)$，$\overline{AH_1}=\sqrt{5}$

B 點對 x 軸作投影點 $H_2(3\,,0\,,0)$，$\overline{AH_2}=2\sqrt{5}$

分別以 H_1、H_2 為圓心，$\overline{AH_1}$ 、$\overline{BH_2}$ 為半徑，

在空間中，對 x 軸旋轉，存在 A'、P、B' 三點

共線



而 $\overline{PA'}=\overline{PA}$ ，$\overline{PB'}=\overline{PB}$

$\therefore \overline{PH_1}:\overline{PH_2}=\overline{A'H_1}:\overline{B'H_2}=\sqrt{5}:2\sqrt{5}=1:2$

P 點坐標為

$\dfrac{1}{3}(3\,,0\,,0)+\dfrac{2}{3}(-1\,,0\,,0)=\left(\dfrac{1}{3}\,,0\,,0\right)$

故選(1)(3)(4)(5)。

三、選填題

13. $(2, 4, 3, -2)$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：評量三次函數的大域特徵與一次近似

解析：$\because$ 大域特徵和 $y=2x^3$ 接近　$\therefore a=2$

設 $f(x)=2(x+1)^3+k(x+1)^2+x-2$

又 $f(1)=7$　$\therefore f(1)=16+4k-1=7 \Rightarrow k=-2$

即 $f(x)=2(x+1)^3-2(x+1)^2+x-2$

$=2(x^3+3x^2+3x+1)-2(x^2+2x+1)+x-2$

$=2x^3+4x^2+3x-2$

故序組 $(a, b, c, d)=(2, 4, 3, -2)$。

14. 1

出處：第四冊〈空間概念與空間坐標系〉

目標：理解四面體體積公式並得到四面體體積最大的情況

解析：由題目可知，底面 $\triangle ABC$ 為邊長 2 的正三角形

底面積 $\triangle ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$

當高為 $\frac{\sqrt{3}}{2}\times 2=\sqrt{3}$，即 $\triangle ABC$ 與 $\triangle PAC$ 夾 90° 時，

四面體體積有最大值為 $\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=1$。

15. $(-6, 10)$

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：評量圓的圖形概念與點到直線的距離公式之使用

解析：設圓心 $Q(3, y)$，$y<0$

$d(Q, L)=\frac{|9-4y-4|}{5}=|y|=-y$

$\Rightarrow |5-4y|=-5y$

$\Rightarrow 5-4y=-5y$

$\Rightarrow -y=5$

$\Rightarrow y=-5$

$\Rightarrow Q(3, -5)$　$\therefore$ 半徑為 5

故圓方程式為 $(x-3)^2+(y+5)^2=25$

$\Rightarrow x^2+y^2-6x+10y+9=0$

故數對 $(d, e)=(-6, 10)$。

16. 157

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：估計正數的大小

解析：$2^{521}\approx(10^{0.3010})^{521}=10^{156.821}=10^{0.821}\times 10^{156}$

$\therefore 2^{521}-1$ 是 157 位數。

17. -1

出處：第四冊〈矩陣與資料表格〉

目標：矩陣乘法反方陣的概念

解析：$\because A^{-1}A=I$ 且 $A^{-1}=A$

$\therefore A^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{bmatrix}1+2c & 2+2d\\ c+cd & 2c+d^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$1+2c=1 \Rightarrow c=0$

$2+2d=0 \Rightarrow d=-1$

$\therefore c+d=-1$。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. (4)

出處：第一冊〈直線與圓〉

目標：評量平面幾何的推理能力

解析：藍牙耳機的連線系統為兩位置間的線段，相當於將藍牙耳機所在的位置視為一點，接收藍牙訊號的位置視為另一點，這兩點形成一連線段，可將藍牙耳機所在位置當作圓心，在可接收藍牙訊號範圍內的接點皆可視為位在固定半徑的圓內，在斷線範圍則視為在固定半徑的圓外；直線 AB 上，$\overline{AB}$ 都在圓內，而直線 AB 上非 $\overline{AB}$ 的部分都不在圓內。

因此可視 $\overline{AB}$ 為圓上的弦，圓心必在中垂線上。

故選(4)。

19. (2)(4)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：評量平面幾何的推理能力

解析：同 18. 題，A、B、C 位在同一圓上，此圓心即為藍牙耳機所在 (即 $\triangle ABC$ 的外心)，又餘弦定理算出 $\cos A$ 的值為負數，故角 A 為鈍角，$\overline{BC}$ 為最長邊。

因此鈍角三角形的外心必在三角形外，且一定在直線 BC 的外側 (與 A 點異側)

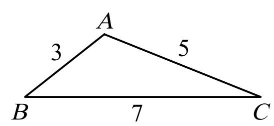
故選(2)(4)。

20. $7\sqrt{3}$ 公尺

出處：第二冊〈三角比〉

目標：正、餘弦定理的概念

解析：〔解法一〕



由餘弦定理得

$\cos A=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\times 3\times 5}=-\frac{1}{2}$

$\therefore \sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$

由正弦定理得

$\frac{7}{\sin A}=2R \Rightarrow R=7\times\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3R=7\sqrt{3}$。

〔解法二〕

由海龍公式與外接圓公式可得

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{abc}{4R}$，

所求即為 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$

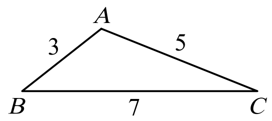
$=3R=\frac{3abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

$=\frac{3\times 3\times 5\times 7}{4\sqrt{\frac{15}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times\frac{9}{2}}}$

$=7\sqrt{3}$ (公尺)。

◎評分原則

〔解法一〕



由餘弦定理得

$\cos A=\dfrac{3^2+5^2-7^2}{2\times3\times5}=-\dfrac{1}{2}$ (2 分)

$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (1 分)

由正弦定理得

$\dfrac{7}{\sin A}=2R \Rightarrow R=7\times\dfrac{2}{\sqrt{3}}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{3}$ (2 分)

$\therefore \overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=3R=7\sqrt{3}$ 。 (1 分)

〔解法二〕

由海龍公式與外接圓公式可得

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\dfrac{abc}{4R}$ ， (3 分)

所求即為 $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$

$=3R=\dfrac{3abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ (1 分)

$=\dfrac{3\times3\times5\times7}{4\sqrt{\dfrac{15}{2}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{9}{2}}}=7\sqrt{3}$ (公尺)。 (2 分)