全國高中 114 年(113 學年度)高三上
第四次聯合模擬考數學　數 B 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 設 $f(x)$ 為次數不低於 2 之多項式，若以 $x-1$ 除 $f(x)$，則餘式為 a，商式為 $Q(x)$，再以 $x-2$ 除 $Q(x)$，餘式為 3，若 $f(1)=5f(2)$，則 a 值為下列哪一個選項？
(1) $-\dfrac{5}{4}$　(2) -5　(3) $-\dfrac{15}{4}$　(4) -15　(5) 15

答：(3)

解：$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)Q(x)+a \\ Q(x)=(x-2)q(x)+3 \end{array}\right\rangle \xrightarrow{f(1)=5f(2)} a=5\times[1\times3+a] \Rightarrow a=-\dfrac{15}{4}$

2. 在坐標平面上，若直線 L 的方程式為 $y=mx+1$，其中 m 為實數，則直線 L 與下列哪一個圖形必相交？
(1) x 軸　(2) $(x-3)^2+(y-1)^2=1$　(3) $y=x$
(4) $x^2+y^2=1$　(5) $(x-1)^2+y^2=1$

答：(4)

解：$y=mx+1$ 必過點 $(0,1)$，而 $(0,1)\in x^2+y^2=1$

3. 設 $\overrightarrow{a}=\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，若向量 $\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{a}$ 的夾角為 $120°$，且 $\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，則 $\overrightarrow{b}$ 可能為下列哪一個選項？
(1) $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(2) $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$　(3) $\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
(4) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},-\dfrac{1}{2}\right)$　(5) $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$

答：(2)

解：$\left|\overrightarrow{a}\right|=1$，$\left|\overrightarrow{b}\right|=1$，$\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a}=1\times1\times\cos120°=-\dfrac{1}{2}$

4. 袋中有 12 個球，其中有 3 個白球，9 個黑球，若每球被取出的機會均等，今自袋中任取 3 個球，則取出白球個數的期望值為何？
(1) 0.25 個　(2) 0.3 個　(3) 0.5 個　(4) 0.6 個　(5) 0.75 個

答：(5)

解：$E(X)=3\left[\dfrac{3}{12}\times1+\dfrac{9}{12}\times0\right]=\dfrac{3}{4}$

5. 在半徑為 10 公分的地球儀上有相異兩點 A、B 都在北緯 $45°$ 上，若 A、B 兩點的球面距離為 $\dfrac{10\pi}{3}$，且 A 點在東經 $20°$ 上，則 B 點的位置可能在下列哪一個選項？
(1)東經 $70°$　(2)西經 $70°$　(3)西經 $110°$　(4)東經 $100°$　(5)西經 $20°$

$\boxed{\text{答}}$：(2)

$\boxed{\text{解}}$：$A\left(5\sqrt{2},0,5\sqrt{2}\right)$，$B\left(5\sqrt{2}\cos\theta,5\sqrt{2}\sin\theta,5\sqrt{2}\right)$

$$\cos\left(\frac{\frac{10\pi}{3}}{10}\right)=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{50\cos\theta+0+50}{10\times10}\Rightarrow\cos\theta=0\quad\Rightarrow\theta=90°$$

6. 同學會結束後，四對夫妻排成一列拍照，試問男女間隔且夫妻不相鄰的排法有幾種？
(1) 48 種　(2) 144 種　(3) 288 種　(4) 384 種　(5) 2880 種

$\boxed{\text{答}}$：(2)

$\boxed{\text{解}}$：$\underbrace{4!}_{4\text{夫先排}}\times\underbrace{[3]}_{4\text{妻排入}}\times\underbrace{2}_{\text{妻在左或右}}=144$

7. 國內研究學者吳逸民教授等人（Wu et al，2004）分析 1999 年 921 集集地震的災害紀錄以及中央氣象署的強地動資料，獲得地震震度 F 與最大地表速度 PGV 的關係式為 $F=2.14\times\log\left(PGV\right)+1.89$，$PGV$ 的單位為 cm/sec。113 年 4 月 3 日上午 7 點 58 分全臺發生有感地震，臺灣東部外海發生芮氏規模 7.2 的地震，地震深度為 22.5 公里，最大震度 6 級在花蓮縣，而臺北市震度是 5 級，全臺劇烈搖晃。請問花蓮縣的最大地表速度大約是臺北市的最大地表速度的幾倍？（選出最接近的數值）
(1) 1.2 倍　(2) 2 倍　(3) 3 倍　(4) 4 倍　(5) 5 倍

$\boxed{\text{答}}$：(3)

$\boxed{\text{解}}$：$6=2.14\log\left(PGV\text{花}\right)+1.89$、$5=2.14\log\left(PGV\text{北}\right)+1.89$

$$\text{相減}\Rightarrow1=2.14\log\left(\frac{PGV\text{花}}{PGV\text{北}}\right)\Rightarrow\frac{PGV\text{花}}{PGV\text{北}}=10^{\frac{1}{2.14}}\fallingdotseq10^{0.467\cdots}\fallingdotseq3$$

二、多選題

8. 有 40 位同學參加數學與英文能力檢測（總分皆為 100 分），考試後主辦單位將每人成績以 $y_1=0.7x_1+30$ 和 $y_2=0.75x_2+25$ 調整後公布，其中 x_1、x_2 分別為每人數學、英文的原始成績，y_1、y_2 分別為每人數學、英文調整後的成績。已知調整後數學與英文成績的算術平均數皆為 60 分，且調整後的數學、英文標準差分別為 14 分、15 分。請選出正確的選項。
(1)每位同學數學的原始成績皆會低於其調整後的成績
(2)此次檢測，數學原始成績的算術平均數比英文原始成績的算術平均數低
(3)數學原始成績的標準差比英文原始成績的標準差低
(4)若數學原始成績與英文原始成績的相關係數為 0.42，則調整後的數學與英文成績的相關係數應低於 0.42
(5)若 A 同學調整後的數學成績比調整後的英文成績高，則 A 同學的數學原始成績必高於英文原始成績

$\boxed{答}$：(2)

$\boxed{解}$：(1) $y_1=0.7x_1+30>x_1 \Rightarrow x_1<100$。表 100 分學生，調分前後分數相等

(2) $\overline{Y_1}=\overline{Y_2}=60 \Rightarrow 0.7\overline{X_1}+30=0.75\overline{X_2}+25=60 \Rightarrow \overline{X_1}=\frac{300}{7}<\overline{X_2}=\frac{140}{3}$

(3) $S_{y_1}=14=0.7S_{x_1} \Rightarrow S_{x_1}=20$，$S_{y_2}=15=0.75S_{x_2} \Rightarrow S_{x_2}=20$

(4) $r_{x_1y_1}=r_{x_2y_2}=0.42$

(5) $y_1>y_2 \Rightarrow 0.7x_1+30>0.75x_2+25 \Rightarrow$ 無法確定 x_1、x_2 大小

9. 小明一個人玩跳格子的遊戲，格子如右圖所示，他決定投擲一枚均勻硬幣，丟到正面向右跳 1 格，丟到反面向左跳 1 格，但若選到的方向會跳出格子以外，就停在原格子中。假設他的初始位置在 B，令投擲 n 次硬幣後，小明停留在 A、B、C 的機率分別為 a_n、b_n、c_n，請選出正確的選項。

A	B	C

(1) $b_1=\frac{1}{3}$　(2) $b_2=\frac{1}{2}$　(3) $a_4=c_4$

(4) $b_n=a_{n-1}+c_{n-1}$　(5) $b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$

$\boxed{答}$：(2)(3)(5)

$\boxed{解}$：$a_n=c_n$ 且 $b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(1-b_n)$

又 $b_1=0$，$a_1=\frac{1}{2}$，$c_1=\frac{1}{2} \Rightarrow b_2=\frac{1}{2}$

10. 設 $P(a\pi,b)$ 為兩函數 $y=\log x$ 和 $y=\sin x$ 在區間 $[0,2\pi]$ 內之交點，其中 π 為圓周率，a、b 為實數，請選出正確的選項。

(1) $0<a+b<3$

(2) $(b,a\pi)$ 為函數 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 圖形上一點

(3) $\left(\frac{1}{a\pi},-b\right)$ 為函數 $y=\log x$ 圖形上一點

(4) (π,b) 為函數 $y=\sin x$ 以原點為中心水平伸縮 a 倍後圖形上一點

(5) $(a\pi,-b)$ 為函數 $y=\sin x$ 向左平移 π 單位後圖形上一點

$\boxed{答}$：(1)(3)(5)

$\boxed{解}$：(1)畫圖即知，$P(a\pi,b)$ 中 $\frac{1}{2}<a<1$，$0<b<1 \Rightarrow \frac{1}{2}<a+b<2$

(2) $y=\log x$ 與 $y=10^x$ 互為反函數

(3) $-b=\log\frac{1}{a\pi}=-\log a\pi \Rightarrow b=\log_a \pi$

(4)應為伸縮 $\frac{1}{a}$ 倍

(5) $-b=\sin(a\pi+\pi)=-\sin a\pi \Rightarrow b=\sin a\pi$

11.擲筊是利用兩個半月形的木頭筊杯，透過將筊杯擲出，根據落地後兩個筊杯的正反方向，預測事情。根據筊杯的正反可分成以下三種狀況：第一種為一正一反，又名「聖杯」；第二種為兩正面，又名「笑杯」；第三種為兩反面，又名「無杯」。某人持木頭筊杯，若擲出聖杯表「成功」，無杯表「失敗」就不再擲，若得笑杯，則再擲第二次，直到「成功」或「失敗」才停止。若每一個筊杯正、反面出現機會皆相等，且每次擲筊情況不會互相影響，請選出正確的選項。

(1)擲筊情形共有「聖杯」、「笑杯」、「無杯」三種情況，所以第一次就擲出「聖杯」的機率為$\frac{1}{3}$

(2)第五次才擲出「聖杯」的機率為$\frac{1}{512}$

(3)三次以內擲出「聖杯」的機率為$\frac{7}{8}$

(4)在五次以內擲出「聖杯」的條件下，三次以內就擲出「聖杯」的機率為$\frac{16}{341}$

(5)若長年擲筊使得木頭筊杯受損，造成兩個筊杯正、反面出現機率變成每過一年其中一個的正面出現機率增加 0.01、另一個的反面機率增加 0.01，則 30 年後擲筊一次就擲出「聖杯」的機率會超過六成

答：(2)(5)

解：(1)聖：$\frac{2}{4}$，笑：$\frac{1}{4}$，無：$\frac{1}{4}$

(2)前 4 笑，第 5 聖：$\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{2}{4}\right)=\frac{1}{512}$

(3)$\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}=\frac{21}{32}$

(4)$$\frac{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}}{\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^3\times\frac{2}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^4\times\frac{2}{4}}=\frac{336}{341}$$

(5)所求機率$=(0.5+0.01\times 29)^2+(0.5-0.01\times 29)^2=0.6241+0.0441=0.6682$

12.已知空間中有相異兩點$A(-1,1,2)$、$B(3,-2,4)$，請選出正確的選項。

(1) A點對x軸的投影點為$(-1,0,0)$

(2) A點到y軸的距離小於 2

(3) A點對xy平面的對稱點為$(-1,1,-2)$

(4) A點對原點的對稱點為$(1,-1,-2)$

(5)若P點在x軸上，使得$\overline{PA}+\overline{PB}$有最小值，此時$P$點坐標為$\left(\frac{1}{3},0,0\right)$

答：(1)(3)(4)(5)

解：(2) A點對y軸的投影點為$A'(0,1,0)\Rightarrow$ A點到y軸的距離$\sqrt{5}>2$

(5) A點對x軸的投影點為$M(-1,0,0)$、B點對x軸的投影點為$N(3,0,0)$

$$\xrightarrow{\frac{\overline{AM}}{\overline{BN}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{PN}}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}} P\text{點坐標為}\left(\frac{1}{3},0,0\right)$$

三、選填題

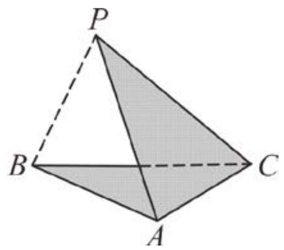
13.已知三次函數 $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=-1$ 附近的一次近似函數為 $y=x-2$，其大域特徵和 $y=2x^3$ 接近，又 $f(1)=7$，試求序組 $(a,b,c,d)=$________。

答： $(a,b,c,d)=(2,4,3,-2)$

解： $y=f(x)=2(x+1)^3+p(x+1)^2+x-2 \xrightarrow{f(1)=7} p=-2$

$\Rightarrow y=2x^3+4x^2+3x-2$

14.有一邊長為 2 的菱形，其中一條對角線 $\overline{AC}$ 的長亦為 2，沿此對角線對摺形成一個四面體 $PABC$，如右圖所示，已知四面體體積公式為「$\frac{1}{3}\times$底面積$\times$高」，則此四面體的最大體積為________。



答： 1

解： 此四面體的最大體積為 $\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\right)\times\underbrace{\left[\sqrt{3}\right]}_{\text{最大的高}}=1$

15.坐標平面上一圓 C 與 x 軸相切於 $(3,0)$，且在 $y\le 0$ 時與直線 $L：3x-4y-4=0$ 也相切，則此圓的方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+9=0$，求數對 $(d,e)=$________。

答： $(d,e)=(-6,10)$

解： 圓心 $(3,t)$，$t<0$，則半徑 $=-t$

則 $\frac{|9-4t-4|}{5}=-t \Rightarrow t=-5$ 或 $\frac{5}{9}$（不合）

圓：$(x-3)^2+(y+5)^2=5^2 \Rightarrow x^2+y^2-6x+10y+9=0$

16.形如 2^n-1 的數（n 為正整數）被稱為梅森數，命名來自西元十七世紀的法國數學家馬蘭．梅森，如果梅森數是質數就稱為梅森質數。古希臘數學家歐幾里德（Euclid）約在西元前三百年證明「質數有無限多個」，但至今數學家仍不知梅森質數是否也有無限多個。1952 年美國利用電子計算機改革了梅森質數的尋找過程，發現了 $2^{521}-1$ 是梅森質數，請計算出 $2^{521}-1$ 是________位數。

答： 157

解： $2^{521}-1 \fallingdotseq 2^{521}=\left(10^{\log 2}\right)^{521} \fallingdotseq 10^{156.821}$ 表 157 位

17.已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ c & d\end{bmatrix}$，若矩陣 A 存在乘法反方陣 A^{-1}，且 $A^{-1}=A$，則 $c+d=$________。

答： -1

$\boxed{解}$：$A^{-1}=A\Rightarrow \det\left(A^{-1}\right)=\det\left(A\right)\xrightarrow{\det\left(A^{-1}\right)\times\det\left(A\right)=1}\det\left(A^{-1}\right)=\det\left(A\right)=\pm1$

若$\det\left(A\right)=+1\Rightarrow d-2c=1\Rightarrow d=1+2c\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\ c & 1+2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+2c & -2\\ -c & 1\end{bmatrix}$，矛盾

若$\det\left(A\right)=-1\Rightarrow d-2c=-1\Rightarrow d=-1+2c\Rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2\\ c & -1+2c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2c & 2\\ c & -1\end{bmatrix}\Rightarrow c=0$

$\Rightarrow d=-1$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

【某報訊】藍牙耳機掉一隻怎麼找？東大生用數學找回

根據日媒《maidonanews》報導，一名東京大學的學生近日走在校園時，不小心掉了其中一隻耳機，但他隨即想到「藍牙耳機發出的訊號是圓形的」，可以利用高中數學所學的知識推算出掉耳機的地方。

有天曉華的手機掉了，也想如法炮製東大生在社群平臺分享找尋藍牙耳機的方法，他利用藍牙連線系統做了以下嘗試。

18. 曉華朝一直線前進，試圖尋找藍牙耳機發出的訊號，在通過此直線上的A點之後，他開始接收到訊號（稱收到訊號的點為接點），而在通過此直線上的B點之後開始接收不到訊號（形成斷線），則他利用高中數學所學的知識會知道下列何者？（單選題）
(1)藍牙耳機一定在A點 (2)藍牙耳機一定在B點
(3)藍牙耳機一定在$\overline{AB}$中點 (4)藍牙耳機一定在$\overline{AB}$的中垂線上
(5)無法確定藍牙耳機在哪一個位置

$\boxed{答}$：(4)

$\boxed{解}$：弦的中垂線必過圓心

19. 承 18.題，曉華分別找到三個藍牙在接收與斷線間的接點A、B、C，連成一個三角形ABC，他利用餘弦定理算出$\cos A$的值為負數，根據高中數學所學的知識知道下列哪些正確？（多選題）
(1)藍牙耳機在三角形ABC的內部
(2)藍牙耳機在三角形ABC的外部
(3)藍牙耳機在三角形ABC的邊上
(4)藍牙耳機一定在直線BC的外側（與A點異側）
(5)藍牙耳機一定在直線BC的內側（與A點同側）

$\boxed{答}$：(2)(4)

$\boxed{解}$：鈍角Δ外心，在Δ外部

20. 承 19.題，曉華將三角形ABC的三邊長度計算出來，分別是 3 公尺、5 公尺、7 公尺，他利用高中數學所學的知識找到藍牙耳機所在的位置O點，請算出$\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}$為多少公尺？

$\boxed{答}$：$7\sqrt{3}$

$\boxed{解}$：$\Delta=\dfrac{3\times5\times7}{4R}=\sqrt{\dfrac{15}{2}\times\dfrac{9}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\dfrac{1}{2}}\Rightarrow R=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\dfrac{7}{\sqrt{3}}$，所求$=7\sqrt{3}$