

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13-1	13-2	13-3
5	1	4	2	3	3	2	25	345	25	124	14	1	0	9
14-1	14-2	15-1	15-2	16-1	16-2	16-3	16-4	17-1	18	19	20			
2	4	—	7	2	4	0	0	7	5					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. 【測驗目標】絕對值

【解析】因為 $-4 < 3x - a < 4 \Rightarrow \frac{a-4}{3} < x < \frac{a+4}{3}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{a-4}{3} < 1 \\ 3 < \frac{a+4}{3} \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \leq a < 7 \\ 5 < a \leq 8 \end{cases} \Rightarrow 5 < a < 7,$$

故選(5)。

2. 【測驗目標】單點透視

【解析】 $V: \begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow V$ 點坐標為 $(7, 9)$,

$\overline{VE} : \overline{VA} = 2 : 3 \Rightarrow \overline{VE} : \overline{EA} = 2 : 1$

$\Rightarrow E$ 點坐標為 $(1, -3)$,

故選(1)。

3. 【測驗目標】圓錐截痕

【解析】當聚光燈垂直照向地面時，圖形為圓形；

當聚光燈照射方向與垂直於舞臺的直線夾角小於 45° 時，圖形為橢圓；

當聚光燈照射方向與垂直於舞臺的直線夾角等於 45° 時，圖形為拋物線；

當聚光燈照射方向與垂直於舞臺的直線夾角大於 45° 時，圖形為雙曲線。

故選(4)。

4. 【測驗目標】直角三角形的三角比

【解析】由題意：

長木樁長 = $30 \tan 35^\circ$ 公尺，短木樁長 = $30 \tan 24^\circ$ 公尺，

所以長短木樁的差為 $30(\tan 35^\circ - \tan 24^\circ)$ 公尺，

故選(2)。

5. 【測驗目標】週期性數學模型

【解析】因為振幅為 2，所以 $|a| = 2 \Rightarrow a = \pm 2$ (負不合)；

因為曲線的振盪中心軸為 $y = 5$ ，所以 $d = 5$ ；

又圖形過 $(0, 7) \Rightarrow (0, 7)$ 代入 $y = 2 \sin(bt + c) + 5$ ，

$$\text{得 } 7 = 2 \sin(b \cdot 0 + c) + 5 \Rightarrow \sin c = 1 \Rightarrow c = \frac{\pi}{2};$$

由圖形可知：週期 $T = 2 = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow b = \pm \pi$ (負不合)，

所以 $b = \pi \neq 6c = 3\pi$ 。

由圖形可知：單擺在第奇數秒時，距離桌面最近，故選(3)。

6. 【測驗目標】平面向量的運算

【解析】 $t\vec{a} - \vec{b} = (t-2, t-6)$ ，

$$|t\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(t-2)^2 + (t-6)^2} = \sqrt{2t^2 - 16t + 40} = \sqrt{2(t-4)^2 + 8},$$

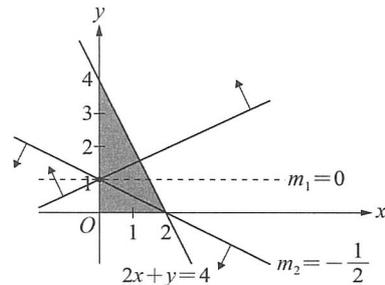
當 $t = 4$ 時， $|t\vec{a} - \vec{b}|$ 之最小值為 $\sqrt{8}$ ，

$$x + y = 4 + \sqrt{8} \approx 6.828,$$

故選(3)。

7. 【測驗目標】二元一次不等式

【解析】如下圖可知：



$x + ky = k$ 為過 $(0, 1)$ ，斜率為 $-\frac{1}{k}$ 的直線

$\Rightarrow x + ky \leq k$ 在 $x + ky = k$ 的左方半平面

$$\therefore -\frac{1}{k} > 0 \text{ 或 } -\frac{1}{k} \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow k < 0 \text{ 或 } 0 < k \leq 2$$

故 $k = -10, -9, \dots, -2, -1, 1, 2$ 滿足題意，共 12 個，故選(2)。

<另解>

直線 $x + ky = k$ 為過 $(0, 1)$ 、 $(k, 0)$ ，由圖形可知，當 $k \leq 2$ 且 $k \neq 0$ 時，

$$\text{不等式組 } \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2x + y \leq 4 \\ x + ky \leq k \end{cases} \text{ 必可圍成一個三角形的區域。}$$

故 $k = -10, -9, \dots, -2, -1, 1, 2$ 滿足題意，共 12 個。

二、多選題

8. 【測驗目標】空間坐標系

【解析】

(1) \times ： \because 赤道與北緯 45° 緯線一圈的距離比為 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，

且兩質點 A、B 移動速率相等

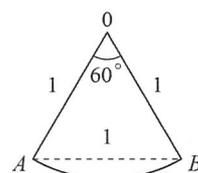
$$\therefore \text{所需之時間比為 } 1 : \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} : 1$$

(2) \circ ：定空間坐標系，此時 $A(\cos(-15^\circ), \sin(-15^\circ), 0)$ ，
 $B(\cos 45^\circ \cos 30^\circ, \cos 45^\circ \sin 30^\circ, \sin 45^\circ)$ ，

$$\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, 0\right), B\left(\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1,$$

$$\therefore \angle AOB = 60^\circ \Rightarrow \text{最短路徑} = 2\pi \times \frac{60^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{3}$$



(3) × : ∵ 赤道與北緯 45° 緯線一圈的距離比為 $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$,

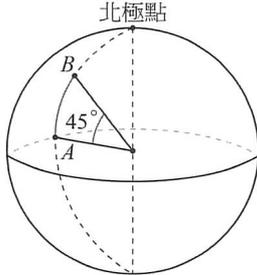
且兩質點 A 、 B 移動速率相等

∴ 質點 A 角速率與質點 B 角速率比為 $1 : \sqrt{2}$

$$\Rightarrow k + \sqrt{2}k = 315^\circ \Rightarrow k = \frac{315^\circ}{\sqrt{2}+1} \approx 130.5^\circ,$$

A 點約位於西經 $15^\circ + 130.5^\circ = 145.5^\circ$ 。

(4) × : 如下圖所示



故 \widehat{AB} 不通過北極點。

(5) ○ : 最短路徑 $= 2\pi \times \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi}{4}$ 。

故選(2)(5)。

9. 【測驗目標】多項式函數與其圖形

【解析】

- (1) × : $y=f(x)$ 圖形的對稱中心點為 $(0, 1)$,
故將 $y=f(x)$ 下移 1 單位後對稱中心才會是原點。
- (2) × : 因為 $y=f(x)$ 自身對稱 $(0, 1)$,
故若 (a, b) 在 $y=f(x)$ 上 ,
其對稱點 $(-a, 2-b)$ 亦會落在 $y=f(x)$ 圖形上。
- (3) ○ : $y=f(x)=x^3+3x+1$ 在 $(0, 1)$ 附近的一次近似直線為 $y=3x+1$ 。
- (4) ○ : $x^3+3x+1=5x+1 \Rightarrow x^3-2x=0 \Rightarrow x(x^2-2)=0$
 $\Rightarrow x=0, \pm\sqrt{2}$, 恰有三相異實根 ,
故兩圖形有三個相異交點
- (5) ○ : $y=x^3-3x^2+6x=(x-1)^3+3(x-1)+4$,
故將 $y=f(x)=x^3+3x+1$ 右移 1 單位、上移 3 單位
即可與 $y=x^3-3x^2+6x$ 的圖形重合。

故選(3)(4)(5)。

10. 【測驗目標】指對數

- 【解析】 $a=2^{70}=10t_1+4$, a 的個位數字為 4 ,
又 $\log a=70 \log 2 \approx 21.07 \Rightarrow a$ 是 22 位數 ;
 $b=3^{60}=10t_2+1$, b 的個位數字為 1 ,
又 $\log b=60 \log 3 \approx 28.626 \Rightarrow b$ 是 29 位數 ;
 $c=5^{50}=10t_3+5$, c 的個位數字為 5 ,
又 $\log c=50 \log 5 \approx 50(1-\log 2)=34.95 \Rightarrow c$ 是 35 位數 ;
 $d=6^{40}=10t_4+6$, d 的個位數字為 6 ,
又 $\log d=40 \log 6 \approx 40(\log 2+\log 3)=31.124$
 $\Rightarrow d$ 是 32 位數 ;
 $e=10^{30}=10t_5$, e 的個位數字為 0 ,
又 $\log e=30 \log 10=30 \Rightarrow e$ 是 31 位數。故
- (1) × : $a+d$ 的個位數字為 0
- (2) ○ : $b+c$ 的個位數字為 6
- (3) × : $a+b$ 為 29 位數
- (4) × : $a+c$ 為 35 位數
- (5) ○ : a 、 b 、 c 、 d 、 e 中最小的數為 a , 是 22 位數。
故選(2)(5)。

11. 【測驗目標】遞迴關係、樹狀圖

【解析】

- (1) ○ : 顯然 $T(0, n)=n+1$, 故 $T(0, 114)=115$ 。
- (2) ○ : 前一天大小藥丸數量若為 $(m, 0)$,
隔天數量必為 $(m-1, 1)$,
故 $T(m, 0)=1+T(m-1, 1)$ 。

- (3) × : 由(2)可得 : $T(2, 0)=1+T(1, 1)$,
又題目舉例可知 $T(1, 1)=7$, 故 $T(2, 0)=8$ 。
- (4) ○ : 前一天大小藥丸數量若為 (m, n) ,
隔天數量分布可能為 $(m-1, n+1)$ 或 $(m, n-1)$,
故 $T(m, n)=1+T(m-1, n+1)+T(m, n-1)$,
所以 $T(2, 1)=1+T(1, 2)+T(2, 0)$ 。
- (5) × : 由(3)、(4) ,
 $T(2, 2)$
 $=1+T(1, 3)+T(2, 1)$
 $=1+(1+T(0, 4)+T(1, 2))+(1+T(1, 2)+T(2, 0))$
 $=3+2 \times T(1, 2)+T(2, 0)+T(0, 4)$
 $=3+2 \times T(1, 2)+8+5$
 $=16+2 \times (1+T(0, 3)+T(1, 1))$
 $=40$ 。

故選(1)(2)(4)。

12. 【測驗目標】一維數據分析

【解析】設分店共有 n 間 , 由(一)、(二)可知總顧客人數為
 $(n-14) \times 9 + 5 \times 1 + 7 \times 2 + 2 \times 3$
 $= (n-14) \times 8 + 2 \times 13 + 7 \times 14 + 5 \times 15$
 $\Rightarrow n=188$ 。

顧客人數 (位)	1	2	3	4	A	8	9	10	12	13	14	15
次數(間)	5	7	2	14	B	C	29	22	D	2	7	5

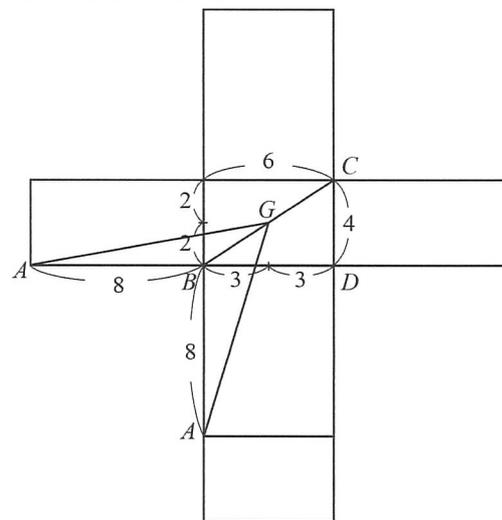
- (1) ○ : $80+29+22=131$ 。
- (2) × : $n=188 > 180$ 。
- (3) × : $188 \times 0.1 = 18.8 \Rightarrow P_{10}$ 在累積 19 間的位置 $\Rightarrow 4$ 人。
- (4) ○ : $188 \times 0.5 = 94 \Rightarrow Me$ 在累積 94 間~95 間的平均位置 $\Rightarrow 9$ 人。
- (5) × : $D=188-131-2-7-5=43$,
 $B+C=80-5-7-2-14=52$,
 $5+14+6+56+AB+8C+261+220+516$
 $=8 \times 174=1392$,
 $AB+8C=314$,
當 $A=5$, $5B+8(52-B)=314 \Rightarrow B=34$ 、 $C=18$;
當 $A=6$, $6B+8(52-B)=314 \Rightarrow B=51$ 、 $C=1$;
當 $A=7$, $7B+8(52-B)=314$
 $\Rightarrow B=102$ 、 $C=-50$, 不合。
所以 D 不一定最大。

故選(1)(4)。

三、選填題

13. 【測驗目標】空間概念

【解析】展開圖如下 :



所求為 $\min \{ \sqrt{(8+3)^2+2^2}, \sqrt{(8+2)^2+3^2} \} = \sqrt{109}$ 。

14. 【測驗目標】組合

【解析】由題意可知必選 A_4 ，則 A_3, A_5 必不選且 A_1, A_2 最多只能選一站，則：

- ① A_1, A_2 不選： $A_6 \sim A_{11}$ 這 6 站選 3 站不相鄰的車站，共有 $C_5^3 = 4$ 種選法；
 ② A_1, A_2 選一站：從 A_1, A_2 中任選一站、 $A_6 \sim A_{11}$ 這 6 站選 2 站不相鄰的車站，所以有 $C_1^2 \cdot C_2^5 = 20$ 種選法。

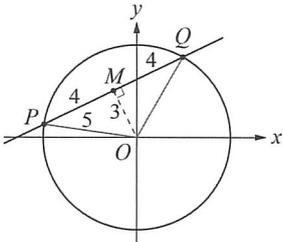
由上述討論可知：共有 24 種選擇站點的方式。

15. 【測驗目標】圓與直線、平面向量的內積

【解析】 $d(O, \overrightarrow{PQ}) = \frac{|6|}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}} = 3$

$$\Rightarrow \overline{PM} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \Rightarrow \overline{PQ} = 8$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} &= |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos \angle POQ \\ &= 5 \cdot 5 \cdot \frac{5^2 + 5^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = -7. \end{aligned}$$



16. 【測驗目標】數列級數

【解析】 $a_1 = 6, a_2 = 15, a_3 = 27, a_4 = 42, \dots$ ，故數列 $\langle a_n \rangle$ 形成一個階差數列

$$\begin{aligned} \Rightarrow a_k &= a_1 + \underbrace{(9 + 12 + 15 + \dots)}_{k-1 \text{ 項}} \\ &= 6 + \frac{(k-1)[18 + (k-2) \times 3]}{2} = \frac{3}{2}(k^2 + 3k) \\ \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{15} &= \frac{3}{2} \left(\frac{15 \times 16 \times 31}{6} + 3 \times \frac{15 \times 16}{2} \right) \\ &= 2400. \end{aligned}$$

17. 【測驗目標】矩陣的乘法與反方陣

【解析】

$$2PR + QR = (2P + Q)R = \begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} R = \begin{bmatrix} -28 & -39 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R &= \begin{bmatrix} -6 & -11 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -28 & -39 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -11 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28 & -39 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

所以 $a + b + c + d = 1 + 1 + 2 + 3 = 7$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

18. 【測驗目標】機率

【解析】所求 $= \frac{C_1^4 \cdot 1^4}{4^4} = \frac{1}{64}$ ，

故選(5)。

19. 【測驗目標】條件機率

【解析】

設 A ：四盒中恰獲得三款卡通公仔， B ：獲得本命公仔。
 四盒恰得三款公仔，所以三款公仔中必有一種重複，

$$\text{故 } P(A) = \frac{C_3^4 \cdot C_1^3 \cdot \frac{4!}{2!}}{4^4} = \frac{9}{16}, \text{ (2分)}$$

四盒中要恰得三款公仔且成功得到本命公仔，

$$\text{則 } P(A \cap B) = \frac{C_2^3 \cdot C_1^3 \cdot \frac{4!}{2!}}{4^4} = \frac{27}{64}, \text{ (3分)}$$

$$\text{故所求} = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{27}{64}}{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}. \text{ (1分)}$$

20. 【測驗目標】期望值

【解析】

設 X 為獲得卡通公仔的款式種類數，由第 18、19 題可知：

$$P(X=1) = \frac{1}{64}, P(X=3) = \frac{9}{16},$$

$$\text{又 } P(X=2) = \frac{C_1^4 \cdot C_1^3 \cdot \frac{4!}{3!} + C_2^4 \cdot \frac{4!}{2!2!}}{4^4} = \frac{21}{64}, \text{ (2分)}$$

$$P(X=4) = \frac{4!}{4^4} = \frac{6}{64} = \frac{3}{32}, \text{ (2分)}$$

$$\text{故 } E(X) = \frac{1}{64} \cdot 1 + \frac{21}{64} \cdot 2 + \frac{36}{64} \cdot 3 + \frac{6}{64} \cdot 4 = \frac{175}{64}. \text{ (2分)}$$