

北北基高中 115 年(114 學年度)

高三上 第四次學測模擬考數學 數 B 試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 小陽回到家看到弟弟的遊戲區放置了 3 顆彈珠，小陽發現若以第 1 顆彈珠在坐標平面上的位置為 $(0, 0)$ ，則第 2 顆彈珠的位置為 $(2, 1)$ ，第 3 顆彈珠的位置為 $(8, 2)$ 。小陽學校的數學老師最近正在教對數函數，他發現這 3 顆彈珠的位置剛好有一個對數函數的圖形通過，請問該對數函數可能為下列哪一個選項？

- (1) $y = \log(x+1)$ (2) $y = \log_2 x$ (3) $y = \log_2(x+1)$
 (4) $y = \log_3 x$ (5) $y = \log_3(x+1)$

答：(5)

解：過 $(0, 0)$ ，故(2)(4)錯
 過 $(2, 1)$ 及 $(8, 2)$ ，故(5)對，(1)(3)錯

2. 已知實係數多項式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 分別除以 $(x-2)$ 、 $(x-1)$ 、 $(x+1)$ 、 $(x+2)$ 的餘式依序為 1、2、3、4，試求 $3b+8d$ 之值為何？

- (1) 4 (2) 8 (3) 12 (4) 16 (5) 20

答：(5)

解：

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 1 \\ f(1) = a + b + c + d = 2 \\ f(-1) = -a + b - c + d = 3 \\ f(-2) = -8a + 4b - 2c + d = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} 16a + 4c = -3 \\ 8b + 2d = 5 \\ 2a + 2c = -1 \\ 2b + 2d = 5 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{12} \\ c = -\frac{5}{12} \end{cases}, \begin{cases} b = 0 \\ d = \frac{5}{2} \end{cases}$$

3. 某液晶面板由紅、綠、藍三種顏色的 LED 燈泡組成。已知各色燈泡亮燈的循環規律如下，並在同一時間各自開始做下述循環：

紅燈：「亮 3 秒，再暗 2 秒」，

綠燈：「亮 4 秒，再暗 3 秒」，

藍燈：「亮 5 秒，再暗 5 秒」，

若在某一時刻三種顏色的燈泡同時由亮轉暗，並設各燈泡亮、暗切換的時間極短可被忽略，則至少再過幾秒才能看到三種顏色的燈泡皆為亮燈？

- (1) 15 秒 (2) 16 秒 (3) 17 秒 (4) 18 秒 (5) 19 秒

答：(3)

解：

	15	16	17	18	19
紅	×	×	○	○	○
綠	×	×	○	○	○
藍	○	○	○	○	○

4. 設 A 為 2×3 階矩陣，且 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 。若 $[0 \quad 1] A = [a \quad b \quad c]$ ，試求 $a - b + c$ 之值為何？
 (1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0 (5) -1

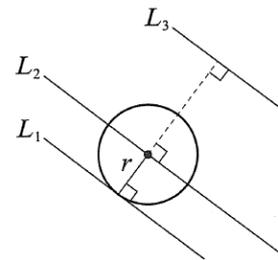
答：(2)

解： $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 9 \end{bmatrix} \times \frac{1}{3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$
 $[0 \quad 1] \begin{bmatrix} 1 & -3 & -6 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} = [2 \quad 3 \quad 3]$

5. 平面上有三條直線，分別為 $L_1 : 3x + 4y + 3 = 0$ 、 $L_2 : 3x + 4y = 0$ 、 $L_3 : 3x + 4y - 7 = 0$ 。已知直線 L_2 通過圓 Γ 的圓心，且 L_1 和圓 Γ 相切。設 P 為圓 Γ 上一動點，若 P 點到 L_3 距離的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $2M + m$ 之值為何？
 (1) 3 (2) $\frac{18}{5}$ (3) 4 (4) $\frac{24}{5}$ (5) 6

答：(4)

解： $d(L_1, L_2) = \frac{3}{5}$ ， $d(L_2, L_3) = \frac{7}{5}$
 $m = \frac{7}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ ， $M = \frac{7}{5} + \frac{3}{5} = 2 \Rightarrow 2M + m = \frac{24}{5}$



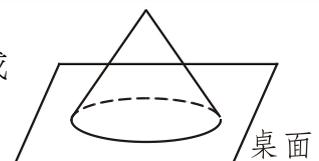
6. 某地球儀為半徑 R 公分之球體，今有一螞蟻從此地球儀的北極點出發，沿著 0 度經線往南爬行。已知螞蟻抵達北緯 60 度時所經過的弧線之長度為 $\frac{10\pi}{3}$ 公分，試問此地球儀北緯 60 度的緯線一圈長度為多少公分？
 (1) 10π 公分 (2) $10\sqrt{3}\pi$ 公分 (3) 20π 公分 (4) $20\sqrt{3}\pi$ 公分 (5) 30π 公分

答：(3)

解： 弧長 $= R \times \frac{\pi}{6} = \frac{10\pi}{3} \Rightarrow$ 地球儀半徑 $R = 20$
 北緯 60° 之緯線半徑 $r = \frac{R}{2} = 10$ ，緯線長 $2\pi \times 10 = 20\pi$

二、多選題

7. 小林將一個直圓錐形狀的蛋糕平放在桌面上，如右圖，並用刀子切此蛋糕一次，在切的過程中，小林切的方向只有「垂直桌面」或「平行桌面」兩種方向，則其切面輪廓可能是什麼圖形？
 (1) 等腰三角形 (2) 圓形
 (3) 橢圓形 (4) (不考慮底面的一線段) 拋物線的一部分
 (5) (不考慮底面的一線段) 雙曲線的一部分



答：(1)(2)(5)

- 解：(1)過會聚點，並垂直桌面
 (2)平行桌面
 (5)不過會聚點，並垂直桌面

8. 一等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差為正數，且前 n 項的和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ，則下列哪些敘述是正確的？

- (1) $S_{300} = 3 \times S_{100}$ (2) $S_{200} > S_{100}$
 (3) $S_{100} + S_{300} = 2 \times S_{200}$ (4) $S_{400} - S_{200} > S_{300} - S_{100}$
 (5) $S_{300} - S_{100} = 20 \times (S_{205} - S_{195})$

答：(4)(5)

- 解：(1) $S_{300} = 150(2a_1 + 299d) \neq 3 \times S_{100} = 3 \times (2a_1 + 99d) \times 50$
 (2) $S_{200} = 100(2a_1 + 199d)$ ， $S_{100} = 50(2a_1 + 99d)$ ，不確定大小
 (3) $S_{100} + S_{300} = 50(2a_1 + 99d) + 150(2a_1 + 299d) = 400a_1 + 49800d$
 $2 \times S_{200} = 2 \times 100(2a_1 + 199d) = 400a_1 + 39800d$
 (4) $S_{400} - S_{200} = 200(2a_1 + 399d) - 100(2a_1 + 199d) = 200a_1 + 59900d$
 $S_{300} - S_{100} = 150(2a_1 + 299d) - 50(2a_1 + 99d) = 200a_1 + 39900d$
 (5) $20 \times (S_{250} - S_{195}) = 20 \times \left[(2a_1 + 204d) \frac{205}{2} - (2a_1 + 194d) \frac{195}{2} \right]$
 $= 10[20a_1 + 3990d]$

9. 數線上有相異五點 A 、 B 、 C 、 D 、 E ，其所代表的數分別為 a 、 b 、 c 、 d 、 e ，已知 $\log a = 9$ ， $\log b = 9.301$ ， $\log c = 10$ ， $\log d = 10.301$ ， $\log e = 11$ 。今數線上有一質點在早上 8 點整由原點 O 等速在數線的正向出發，已知此質點在 9 分鐘後 (8:09) 抵達 A 點。試問下列哪些敘述是正確的？

- (1)當天此質點大約在 8:18 時抵達 B 點
 (2)當天此質點大約在 9:30 時抵達 C 點
 (3)當天此質點在中午 12:00 前就可抵達 D 點
 (4)當天此質點直到午夜 24:00 仍然未抵達 E 點
 (5)當天此質點「從原點 O 到 A 點所花費時間」與「從原點 O 到 E 點所花費時間」的比值為 $\frac{9}{11}$

答：(1)(2)(3)

- 解： $A(a = 10^9)$ ， $B(b = 10^{9.301} = 2 \times 10^9)$ ， $C(c = 10^{10})$
 $D(d = 10^{10.301} = 2 \times 10^{10})$ ， $E(e = 10^{11})$

(1)(2)質點速度 = $\frac{10^9}{9}$ ，故(1)(2)正確

(4)到達 E 之時間 $\frac{10^{11}}{10^9} \times 9 = 900$ (mins) = 15 (hrs)，表 23:00 到達 E

(3) 到達 D 之時間 $\frac{2 \times 10^{10}}{10^9} \times 9 = 180$ (mins) = 3 (hrs), 表 11:00 到達 D

(5) 所求時間比 = 距離比 = $\frac{10^9}{10^{11}} = \frac{1}{100}$

10. 給定一個實係數三次多項式函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 4$ 。已知 $a < 0$, $y = f(x)$ 圖形的對稱中心為 $(-2, 0)$, 且 $y = f(x)$ 和 x 軸有三個相異交點, 試選出正確的選項。

- (1) $y = f(x)$ 圖形在對稱中心附近的局部近似 (一次近似) 圖形為一條斜率為正的直線
 (2) $b > 0$
 (3) $c < 0$
 (4) $y = f(x)$ 圖形必和 x 軸的正向恰有一個交點
 (5) $y = f(-x) - 8$ 圖形的對稱中心為 $(2, 4)$

答: (1)(4)

解: $f(x) = a(x+3)^3 + p(x+2) + 0$, $a < 0$, $p > 0$

過 $(0, 4) \Rightarrow 8a + 2p = 4 \Rightarrow p = 2 - 4a$

- (1) 所求一次近似 $y = p(x+2)$
 (2) $b = 6a < 0$
 (3) $c = 12a + p = 8a + 2$, 不確定正負
 (4) 正確
 (5) $y = f(-x)$, 對稱中心 $(2, 0)$
 $y = f(-x) - 8$, 對稱中心 $(2, -8)$

11. 佳佳布行老闆到日本批發 100 種不同花色的棉布, 其布長 X (碼) 與價格 Y (日圓) 的資料如右表。現在為了提供給臺灣拼布同好做購買參考, 將單位分別轉換為英尺

	布長 X (碼)	價格 Y (日圓)
平均數	50	2300
標準差	3	5

(1 碼 = 3 英尺) 與臺幣 (1 日圓 = 0.25 新臺幣 (元))。現將這 100 筆數據繪製成散布圖, 若布長 (X) 與價格 (Y) 的相關係數為 $r = 0.9$, 價格 (Y) 對布長 (X) 的迴歸直線 (最適直線) 為 L , 其斜率為 m ; 而單位轉換後布長 (X') 與價格 (Y') 的相關係數為 r' , 價格 (Y') 對布長 (X') 的迴歸直線 (最適直線) 為 L' , 其斜率為 m' , 則下列選項哪些正確?

- (1) 布長 (X) 與價格 (Y) 呈現正相關 (2) $m = 1.5$ (3) $r' < r$ (4) $m' < m$
 (5) 直線 L' 必通過點 $(150, 575)$

答: (1)(2)(4)(5)

解: (1)(3) $r' = r = 0.9$

(2) $m = r \times \frac{S_y}{S_x} = \frac{9}{10} \times \frac{5}{3} = \frac{3}{2}$

(4) $m' = r' \times \frac{S'_y}{S'_x} = \frac{9}{10} \times \frac{0.25 \times 5}{3 \times 3} = \frac{1}{8}$

(5) $\left(y - \bar{Y}' \right) = m' \left(x - \bar{X}' \right) \Rightarrow (y - 575) = \frac{1}{8} (x - 150)$

12. 桌上有 7 張卡片分別寫有 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 今大寶、二寶和小寶從中同時各自抽走 1 張 (三人所取的卡片皆不同)。設每張卡片被抽到的機會均等, 試選出正確的選項。

(1) 三張卡片數字和為偶數的機率為 $\frac{19}{35}$

(2) 三張卡片數字積為偶數的機率為 $\frac{18}{35}$

(3) 三張卡片數字為等差數列的機率為 $\frac{9}{35}$

(4) 三張卡片數字中, 大寶所持卡片大於二寶與小寶卡片數字的機率為 $\frac{1}{6}$

(5) 已知大寶抽到數字為 3 的卡片, 則二寶所持卡片數字大於小寶數字的機率為 $\frac{1}{2}$

答: (1)(3)(5)

解: (1) $P = \frac{1}{C_3^7} [C_3^3 + C_1^3 C_2^4] = \frac{1}{35} [1 + 18] = \frac{19}{35}$

(2) $P = 1 - \frac{1}{C_3^7} [C_3^4] = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$

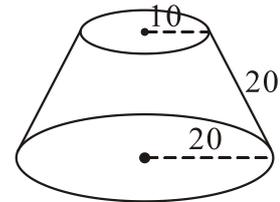
(3) $P = \frac{1}{C_3^7} [5 + 3 + 1] = \frac{9}{35}$

(4) $P = \frac{2!}{3!} = \frac{1}{3}$

(5) $P = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$

三、選填題

13. 直圓錐被截去一部分形成右圖, 做為運動會時供閱兵站立的平臺。已知此平臺上圓的半徑為 10 英寸, 下圓的半徑為 20 英寸, 則其總表面積 (上圓 + 下圓 + 側面) 為 _____ 平方英寸。



答: 1100π

解: $\pi \times 10^2 + \pi \times 20^2 + \left[\pi \times 40^2 - \pi \times 20^2 \right] \times \frac{1}{2}$

14. 設 $\langle a_n \rangle$ 為一等比數列, 已知 $a_1 > 0$, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = -15$,

且 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + |a_4| = 45$, 試求 $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 =$ _____。

答: 765

解: $\frac{a_1 [1 - r^4]}{1 - r} = -15, \frac{a_1 [1 - r^4]}{1 + r} = 45$

$$\Rightarrow r = -2, a_1 = 3 \Rightarrow \frac{a_1^2 \left[1 - (r^2)^4 \right]}{1 - r^2} = 765$$

15. 排球比賽由甲、乙兩支隊伍各派 6 名球員上場，當球由甲隊發球員將球發到乙隊場地中時（不考慮界外），乙隊中的 6 人必須在球不落地的情況下，透過最多 3 次擊球將排球打回到甲隊的場地，且乙隊的同一位球員不得連續擊球兩次。試問甲隊發球後，乙隊將球打回甲隊場地前（假設乙隊沒有漏接，且能正確地打回到甲隊場地），乙隊球員擊球的全部過程有_____種可能。

答：186

解： $6 \times 5 \times 5 + 6 \times 5 + 6 = 150 + 30 + 6 = 186$

16. 平面上有不共線三點 A, B, C ，已知 D 在 $\angle CAB$ 的內角平分線上，且 $\cos \angle CAB = \frac{4}{5}$ ， $\overline{AC} = 10$ ，若 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ，試求 $\overline{CD} =$ _____。(化為最簡分數)

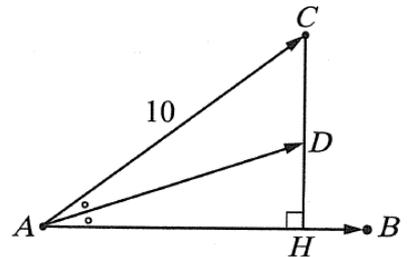
答： $\frac{10}{3}$

解： $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ ，表 C, D 在 \overrightarrow{AB} 上投影均為 H

$$\cos \angle CAB = \frac{4}{5}, \overline{AC} = 10 \Rightarrow \overline{AH} = 8, \overline{CH} = 6$$

$$\Rightarrow \cos \angle DAH = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \tan \angle DAM = \frac{1}{3}$$

$$\text{故 } \overline{DH} = 8 \times \frac{1}{3} \Rightarrow \overline{CD} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$$



17. 設 a, b 為正整數，且 $a < b < 10$ ，當 $\frac{9a^2 + b^2}{3ab}$ 為最小值時， $2a + b$ 的所有可能之值的總和為_____。

答：30

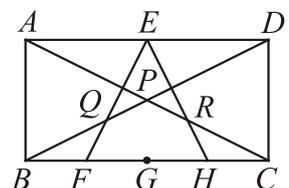
解： $\frac{9a^2 + b^2}{3ab} = \frac{3a}{b} + \frac{b}{3a} \geq 2\sqrt{\frac{3a}{b} \times \frac{b}{3a}} = 2$ 。等號成立於 $\frac{3a}{b} = \frac{b}{3a} \Rightarrow 3a = b$

$$0 < a < b < 10, a, b \in \mathbb{N} \Rightarrow (a, b) = (1, 3)(2, 6)(3, 9), \text{ 故 } 2a + b = 5, 10, 15$$

第貳部分：混合題或非選擇題

18-20 題為題組

已知 $ABCD$ 是一個面積為 72 平方單位的矩形，且 $\overline{AD} = 2\overline{AB}$ 。若 E 點為 \overline{AD} 的中點， F, G, H 為 \overline{BC} 上的四等分點，連接 \overline{AC} 與 \overline{BD} 交於 P ， \overline{BD} 與 \overline{EF} 交於 Q ， \overline{AC} 與 \overline{EH} 交於 R 。若 G 點為坐標平面上的原點， C 點和 E 點分別在坐標平面上 x 軸和 y 軸的正向上，試回答下列問題。



18. 試求 Q 、 R 兩點的坐標。

答： $Q(-2, 2)$ ， $R(2, 2)$

解： $G(0, 0)$ ， $H(3, 0)$ ， $C(6, 0)$ ， $F(-3, 0)$ ， $B(-6, 0)$

$A(-6, 6)$ ， $D(6, 6)$ ， $E(0, 6)$ ， $P(0, 3)$

$\overrightarrow{BD} = x - 2y + 6 = 0$ ， $\overrightarrow{EF} = 2x - y + 6 = 0 \Rightarrow Q(-2, 2)$ ，故 $R(2, 2)$

19. 試求 $\cos \angle FQP$ 、 $\cos \angle QPR$ 之值。

答： $\cos \angle FQP = -\frac{4}{5}$ ， $\cos \angle QPR = -\frac{3}{5}$

解： $\cos \angle FQP = \frac{\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{QF}}{|\overrightarrow{QP}| |\overrightarrow{QF}|} = \frac{(2, 1) \cdot (-1, -2)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{4}{5}$

$\cos \angle QPR = \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|} = \frac{(-2, -1) \cdot (2, -1)}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{3}{5}$

20. 試求五邊形 $FHRPQ$ 的面積為下列哪個選項？（單選題）

(1) 8 平方單位 (2) 10 平方單位 (3) 12 平方單位 (4) 14 平方單位

(5) 16 平方單位

答： (3)

解： 所求 = $2 PGHR = 2(\Delta PGC - \Delta RHC) = 2\left(6 \times 3 \times \frac{1}{2} - 3 \times 2 \times \frac{1}{2}\right) = 12$