

全國公私立 107 學年度指定科目第 6 次聯合模擬考試數學乙

第壹部分：選擇題



一、單選題：(18 分)

- 老師想從四位學生中選出當週禮拜一至禮拜五的值日生，考量人力與工作內容的問題，有以下的限制：
 - (甲)當天若排值日生，只需要一位學生擔任。
 - (乙)一位學生一周最多只能當一次值日生。
 - (丙)最多可三天沒有安排值日生，但不得連續兩天皆沒有安排學生擔任值日生。
 則共有幾種安排方式？
 (1) 120 種 (2) 132 種 (3) 144 種 (4) 156 種 (5) 168 種
- 已知 k 為整數，三次多項式 $f(x) = x^3 + (k-2)x^2 + (1-2k)x - 2$ ，若 $f(x) = 0$ 恰有一實根，且該實根為正有理根，則 k 的最小值為何？
 (1) -1 (2) 0 (3) 1 (4) 2 (5) 3
- 設 n 為正整數且從 1 到 10^n 中任選一個正整數，每個正整數被選出的機會均等且此正整數數字中含有 3 的機率大於 $\frac{4}{5}$ ，試求在此條件下的最小值 n 為？
 (1) 13 (2) 14 (3) 15 (4) 16 (5) 17

二、多選題：(32 分)

- 若 $\langle a_n \rangle$ 為 $a_1 > 0$ 且公比為 r 的等比數列，其中 $0 < r < \frac{1}{2}$ ，則下列哪些為正確的選項？
 (1) $\left\langle a_n + \frac{1}{n} \right\rangle$ 為發散 (2) $\langle 2^n a_n \rangle$ 為發散 (3) $\langle \log a_n \rangle$ 為發散
 (4) $\langle (-1)^n a_n \rangle$ 為發散 (5) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ 為收斂
- 已知 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 為數線上相異三點，則下列敘述哪些正確？
 (1) 若 $c = 2a - b$ ，則 A 為 B 、 C 的中點 (2) 若 $c = \frac{a+3b}{3}$ ，則 C 必不在 A 、 B 之間
 (3) 若 $\frac{|c-a|}{|b-c|} = 2$ ，則 $c = \frac{a+2b}{3}$ (4) 若 $0 < a < b$ ，且 C 為 A 、 B 的中點，則 $c^2 - ab > 0$
 (5) 若 $0 < a < b$ ，則恰有一解滿足 $|x-a| + |x-b| = b-a$
- 給定三個函數： $f_1(x) = x+3$ 、 $f_2(x) = k^{x-a} + b$ 、 $f_3(x) = \log_k(x-c) + d$ ， $a, b, c, d \in R$ ，其中 $k = \sqrt[6]{3}$ 。已知三個函數皆通過 $(3, 6)$ 、 $(9, 12)$ ，請問下列敘述哪些正確？
 (1) $f_1(6) > f_2(6)$ (2) $f_3(6) > f_2(6)$ (3) $f_2(6) > f_2(12)$ (4) $f_1(12) > f_2(12)$ (5) $f_3(12) > f_2(12)$
- 已知某市要由 A 或 B 兩位市長候選人中選出市長，於選舉前由某公司電話抽樣調查該市 500 人的支持意向，並針對民調對象的學歷進行調查。表(1)為支持 A 擔任市長的人最高學歷比例，表(2)為支持 B 擔任市長的人最高學歷比例，請問下列敘述哪些正確？

表(1)

| | 支持 A 擔任市長 |
|-------|-----------|
| 國小 | 9% |
| 國中 | 17% |
| 高中 | 13% |
| 大學 | 13% |
| 碩士、博士 | 48% |

表(2)

| | 支持 B 擔任市長 |
|-------|-----------|
| 國小 | 8% |
| 國中 | 52% |
| 高中 | 15% |
| 大學 | 11% |
| 碩士、博士 | 14% |

- (1) 由該調查得知支持 B 擔任市長的人之中，有一半以上的人最高學歷為國中
- (2) 此次民調顯示這 500 人之中，兩人支持率是一樣的
- (3) 這 500 位之中最高學歷為碩士或博士的人，支持 A 的人比支持 B 的人多
- (4) 這 500 位之中最高學歷為高中或大學的人，支持 A 的人比支持 B 的人人數一樣
- (5) 這 500 位抽樣對象中，最高學歷為國中的佔為最多數

三、選填題：(24 分)

A. 有一矩形 $ABCD$ ，其中 E 為 \overline{AB} 中點， F 為 \overline{CD} 中點，若 $E(1,2)$ 、 $C(25,-5)$ 且 \overline{ED} 上有一點 $G(-3,5)$ ，則 G 在 \overline{EF} 上投影點為_____。

B. 已知 50 支籤中有 m 支是中獎籤，其中 m 為介於 2 到 49 之間的整數，今有 50 人依序各抽一支，若「第 k 支為非中獎籤且第 $k+1$ 支與第 $k-1$ 支為中獎籤」的機率為 $\frac{f(m)}{50 \times 49 \times 48}$ ，其中 k 為介於 2 到 49 之間的整數，其中 $f(m)$ 可表示為 m 的三次多項式 $am^3 + bm^2 + cm + d$ ， $a、b、c、d \in R$ ，則 $f(m)$ 的二次項係數 $b =$ _____。

C. $\left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \text{ 且 } a, b, c, d \in \{1, 2, 4\} \right\}$ 中隨機抽取一個增廣矩陣 A ，則該增廣矩陣 A 所代表的線性方程組為恰有一組解的機率為_____。

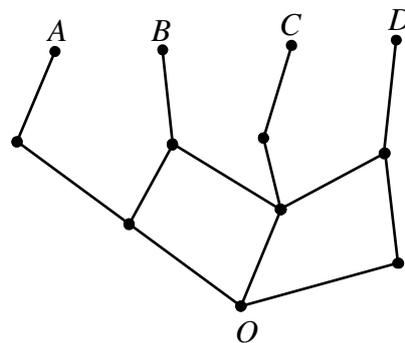
第貳部分：非選擇題(26 分)

一、在直角坐標系中考慮一不等式 $\log_{(y+1)}(12-2y) > \log_{(y+1)} x > \log_{(y+1)} y$ ，

- (1) 試在直角坐標系中畫出該不等式之區域。(6 分)
- (2) 試求該不等式於直角坐標系中所圍成的面積。(3 分)
- (3) 若點 (x, y) 中的 $x、y$ 為整數，則我們稱 (x, y) 為格子點，試問滿足該不等式中所有格子點的個數。(5 分)

二、今有一山洞裡共有 A 、 B 、 C 、 D 四個終點如圖(1)，其中 A 處有 10 公斤的黃金， C 處有 35 公斤的黃金， B 、 D 兩處則是沒有任何東西。今一冒險者從起點 O 開始探險尋找寶藏，只可往上走不可回頭走，走到終點即停止。若遇雙叉路口時，以投擲一枚公正銅板決定選擇的路，若出現正面選擇右邊的路；或出現反面選擇左邊的路。若遇到三叉路口時，以投擲兩枚公正硬幣決定，若出現兩次正面選擇右邊的路；或出現兩次反面選擇左邊的路；若出現一正一反則選擇中間的路。假設隨機變數 X 為發現的黃金公斤數。

- (1) 試求 X 的期望值。(請用最簡分數表示)(7 分)
- (2) 試求 X 的變異數。(請用最簡分數表示)(5 分)



圖(1)

RB5100 全國公私立 107 學年度指定科目第 6 次聯合模擬考試數學乙

選擇題：1. 無 2. (1) 3. (4) 4. (3)(5) 5. (1)(4) 6. (1)(2) 7. (1)

選填題：A. $(\frac{7}{5}, \frac{14}{5})$ B. 51 C. $\frac{62}{81}$

非選擇題：一、(1) 略 (2) 24 (3) 15

二、(1) 10 (2) $\frac{875}{4}$