

# 全國公私立高級中學

## 107 學年度指定科目第六次聯合模擬考試

考試日期：108 年 4 月 10~11 日

### 數學乙

#### — 作答注意事項 —

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
  - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
  - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
  - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{18}{19}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 19 列的  $\frac{\square}{8}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{20 \text{ 21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在

答案卡的第 20 列的  $\frac{-}{\square}$  與第 21 列的  $\frac{7}{\square}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

第壹部分：選擇題(單選題、多選題及選填題共占 74 分)

一、單選題(占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 老師想從四位學生中選出當週禮拜一至禮拜五的值日生，考量人力與工作內容的問題，有以下的限制：  
(甲) 當天若排值日生，只需要一位學生擔任。  
(乙) 一位學生一周最多只能當一次值日生。  
(丙) 最多可三天沒有安排值日生，但不得連續兩天皆沒有安排學生擔任值日生。  
則共有幾種安排方式？
  - (1) 120 種
  - (2) 132 種
  - (3) 144 種
  - (4) 156 種
  - (5) 168 種
  
2. 已知  $k$  為整數，三次多項式  $f(x) = x^3 + (k-2)x^2 + (1-2k)x - 2$ ，若  $f(x) = 0$  恰有一實根，且該實根為正有理數，則  $k$  的最小值為何？
  - (1) -1
  - (2) 0
  - (3) 1
  - (4) 2
  - (5) 3

3. 設  $n$  為正整數且從 1 到  $10^n$  中任選一個正整數，每個正整數被選出的機會均等且此正整數數字中含有 3 的機率大於  $\frac{4}{5}$ ，試求在此條件下的最小值  $n$  為？
- (1) 13
  - (2) 14
  - (3) 15
  - (4) 16
  - (5) 17

## 二、多選題(占 32 分)

說明：第 4 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 若  $\langle a_n \rangle$  為  $a_1 > 0$  且公比為  $r$  的等比數列，其中  $0 < r < \frac{1}{2}$ ，則下列哪些為正確的選項？
- (1)  $\langle a_n + \frac{1}{n} \rangle$  為發散
  - (2)  $\langle 2^n a_n \rangle$  為發散
  - (3)  $\langle \log a_n \rangle$  為發散
  - (4)  $\langle (-1)^n a_n \rangle$  為發散
  - (5)  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  為收斂

5. 已知  $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$  為數線上相異三點，則下列敘述哪些正確？

(1) 若  $c=2a-b$ ，則  $A$  為  $B$ 、 $C$  的中點

(2) 若  $c=\frac{a+3b}{3}$ ，則  $C$  必不在  $A$ 、 $B$  之間

(3) 若  $\frac{|c-a|}{|b-c|}=2$ ， $c=\frac{a+2b}{3}$

(4) 若  $0 < a < b$ ，且  $C$  為  $A$ 、 $B$  的中點，則  $c^2 - ab > 0$

(5) 若  $0 < a < b$ ，則恰有一解滿足  $|x-a|+|x-b|=b-a$

6. 給定三個函數： $f_1(x)=x+3$ 、 $f_2(x)=k^{x-a}+b$ 、 $f_3(x)=\log_k(x-c)+d$ ， $a, b, c, d \in R$ ，其中  $k=\sqrt[6]{3}$ 。已知三個函數皆通過  $(3,6)$ 、 $(9,12)$ ，請問下列敘述哪些正確？

(1)  $f_1(6) > f_2(6)$

(2)  $f_3(6) > f_2(6)$

(3)  $f_2(6) > f_2(12)$

(4)  $f_1(12) > f_2(12)$

(5)  $f_3(12) > f_2(12)$

7. 已知某市要由 A 或 B 兩位市長候選人中選出市長，於選舉前由某公司電話抽樣調查該市 500 人的支持意向，並針對民調對象的學歷進行調查。表(1)為支持 A 擔任市長的人最高學歷比例，表(2)為支持 B 擔任市長的人最高學歷比例，請問下列敘述哪些正確？

表(1)

	支持 A 擔任市長
國小	9%
國中	17%
高中	13%
大學	13%
碩士、博士	48%

表(2)

	支持 B 擔任市長
國小	8%
國中	52%
高中	15%
大學	11%
碩士、博士	14%

- (1) 由該調查得知支持 B 擔任市長的人之中，有一半以上的人最高學歷為國中
- (2) 此次民調顯示這 500 人之中，兩人支持率是一樣的
- (3) 這 500 位之中最高學歷為碩士或博士的人，支持 A 的人比支持 B 的人多
- (4) 這 500 位之中最高學歷為高中或大學的人，支持 A 的人與支持 B 的人人數一樣
- (5) 這 500 位抽樣對象中，最高學歷為國中的佔為最多數

### 三、選填題(占 24 分)

說明：1. 第 A 至 C 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號(8-18)。

2. 每題完全答對給 8 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 有一矩形  $ABCD$ ，其中  $E$  為  $\overline{AB}$  中點， $F$  為  $\overline{CD}$  中點，若  $E(1,2)$ 、 $C(25,-5)$  且  $\overline{ED}$  上有一點  $G(-3,5)$ ，則  $G$  在  $\overline{EF}$  上投影點為  $\left( \frac{\textcircled{8}}{\textcircled{9}}, \frac{\textcircled{10}\textcircled{11}}{\textcircled{12}} \right)$ 。

- B. 已知 50 支籤中有  $m$  支是中獎籤，其中  $m$  為介於 2 到 49 之間的整數，今有 50 人依序各抽一支，若「第  $k$  支為非中獎籤且第  $k+1$  支與第  $k-1$  支為中獎籤」的機率為  $\frac{f(m)}{50 \times 49 \times 48}$ ，其中  $k$  為介於 2 到 49 之間的整數，其中  $f(m)$  可表示為  $m$  的三次多項式  $am^3 + bm^2 + cm + d$ ， $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ，則  $f(m)$  的二次項係數  $b = \underline{\textcircled{13}\textcircled{14}}$ 。

- C.  $\left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ c & d & 0 \end{bmatrix} \text{ 且 } a, b, c, d \in \{1, 2, 4\} \right\}$  中隨機抽取一個增廣矩陣  $A$ ，則該增廣矩陣  $A$  所代表的線性方程組為恰有一組解的機率為  $\frac{\textcircled{15}\textcircled{16}}{\textcircled{17}\textcircled{18}}$ 。

-----以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷-----

第貳部分：非選擇題(占26分)

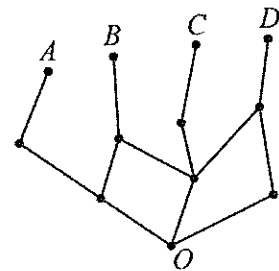
說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號(1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、在直角坐標系中考慮一不等式  $\log_{(y+1)}(12-2y) > \log_{(y+1)} x > \log_{(y+1)} y$ ，

- (1) 試在直角坐標系中畫出該不等式之區域。(6分)
- (2) 試求該不等式於直角坐標系中所圍成的面積。(3分)
- (3) 若點  $(x, y)$  中的  $x, y$  為整數，則我們稱  $(x, y)$  為格子點，試問滿足該不等式中所有格子點的個數。(5分)

二、今有一山洞裡共有  $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  四個終點如圖(1)，其中  $A$  處有 10 公斤的黃金， $C$  處有 35 公斤的黃金， $B$ 、 $D$  兩處則是沒有任何東西。今一冒險者從起點  $O$  開始探險尋找寶藏，只可往上走不可回頭走，走到終點即停止。若遇到雙叉路口時，以投擲一枚公正硬幣決定選擇的路，若出現正面選擇右邊的路；或出現反面選擇左邊的路。若遇到三叉路口時，以投擲兩枚公正硬幣決定，若出現兩次正面選擇右邊的路；或出現兩次反面選擇左邊的路；若出現一正一反擇選擇中間的路。假設隨機變數  $X$  為發現的黃金公斤數。

- (1) 試求  $X$  的期望值。(請用最簡分數表示)(7分)
- (2) 試求  $X$  的變異數。(請用最簡分數表示)(5分)



圖(1)

題本中之圖文已竭力追溯版權，倘有疏漏不慎侵犯版權之處，煩請合法持有版權者與本公司聯絡，謹此致謝。

每道試題均有著作權

嚴禁影印、拷貝、轉賣或轉檔上網營利。



1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
4	1	4	35	14	12	1	7	5	1	4	5	5	1
15	16	17	18										
6	2	8	1										

第壹部分：選擇題

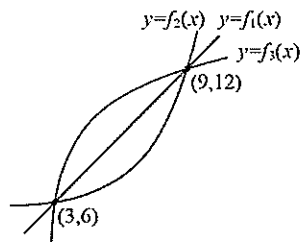
一、單選題

- 可分兩天、三天或四天有值日生討論：  
兩天有值日生(僅二四有值日生)：  
 $4 \times 3 = 12$  種，  
三天有值日生(僅一三五有值日生)：  
 $4 \times 3 \times 2 = 24$  種，  
四天有值日生(一二三四五任選四天)：  
 $C_4^5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  種，  
 $12 + 120 + 24 = 156$  種，  
答案為(4)
- 由一次因式檢驗法  $x$  代入  $\pm 1$ 、 $\pm 2$ ，僅  $x = 2$  時  $k$  為整數且  $f(x)$  恰有一實根，  
得  $f(x) = (x-2)(x^2+kx+1)$ ，  
因  $f(x)$  僅有一實根，故  $x^2+kx+1$  無實數解  
 $\Rightarrow k^2 - 4 < 0 \Rightarrow -2 < k < 2$ ，  
又因  $k$  為整數，故  $k$  最小值為  $-1$ ，  
答案為(1)
- 1 到  $10^n$  共有  $10^n$  個數，其中不含 3 的有  $9^n$ ，  
故得到式子  $1 - \frac{9^n}{10^n} > \frac{4}{5} \Rightarrow (\frac{9}{10})^n < \frac{1}{5} \Rightarrow n \log \frac{9}{10} < \log \frac{1}{5}$   
 $\Rightarrow n(-0.0458) < (-0.6990)$   
 $\Rightarrow n > 15.2620$   
 $\Rightarrow n$  最小值為 16  
答案為(4)

二、多選題

- (1)  $\times a_n$  為收斂且  $\frac{1}{n}$  為收斂，故  $a_n + \frac{1}{n}$  收斂  
(2)  $\times$  設  $a_n = ar^{n-1}$ ，則  $2^n a_n$  為公比  $2r$  的等比數列，  
因  $0 < 2r < 1$ ，故  $2^n a_n$  收斂  
(3)  $\circ$  設  $a_n = ar^{n-1}$ ，得  
 $\log a_n = \log ar^{n-1} = \log a + (n-1) \log r \rightarrow -\infty$   
(4)  $\times (-1)^n a_n$  為公比  $-r$  的等比數列，  
且  $-\frac{1}{2} < -r < 0$ ，故  $(-1)^n a_n$  收斂  
(5)  $\circ$  同(3)， $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  為公比  $-r$  的等比級數，  
且  $-\frac{1}{2} < -r < 0$ ，故  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$  收斂
- (1)  $\circ$  得  $a = \frac{c+b}{2}$ ，故  $A$  為  $B$ 、 $C$  的中點  
(2)  $\times$  當  $a = -1$ 、 $b = 0$  時為其中一個反例  
(3)  $\times \frac{|c-a|}{|b-c|} = 2 \Rightarrow C$  與  $A$  的距離： $C$  與  $B$  的距離 = 2 : 1  
 $C$  可能在  $\overline{AB}$  上或靠近  $B$  的那一側  
(4)  $\circ C$  為  $A$ 、 $B$  的中點  $\Rightarrow c = \frac{a+b}{2} \Rightarrow c > \sqrt{ab}$   
 $\Rightarrow c^2 > ab \Rightarrow c^2 - ab > 0$   
(5)  $\times |x-a| + |x-b| = b-a$  的解為  $a \leq x \leq b$

- 已知底數  $k > 1$ ，故三圖形分別為直線、凹向上、凹向下的圖形。又知三圖形恰有兩交點，如圖：



得  $f_3(6) > f_1(6) > f_2(6)$ 、 $f_2(12) > f_1(12) > f_3(12)$ ，  
故選(1)(2)

- (1)  $\circ$  由附表 2 得知「支持 B 擔任市長」中國中學歷佔了 52%  
(2)(3)  $\times$  題目沒給「支持 A 擔任市長」與「支持 B 擔任市長」的人數，故無法判斷  
(4)  $\times$  題目沒有說明「支持 A 擔任市長」與「支持 B 擔任市長」各為 250 人，故無法判斷  
(5)  $\times$  若支持 A 市長的人較多，有可能是碩博畢佔為最多數

三、選填題

- 設題目所求投影點為  $H$ ，

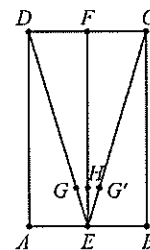
$\overrightarrow{GH}$  與  $\overrightarrow{EC}$  交於  $G'$ ，

如圖，因  $\overrightarrow{EG'} = \frac{1}{5} \overrightarrow{EC} = (\frac{24}{5}, \frac{-7}{5})$ ，

又  $\overrightarrow{EH} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{EG'}) = (\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$ ，

故  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{EH}$

$$= (1, 2) + (\frac{2}{5}, \frac{4}{5}) = (\frac{7}{5}, \frac{14}{5})$$



- 第  $k$  支為非中獎籤且第  $k+1$  支與第  $k-1$  支為中獎籤的機率為  $\frac{m \times (50-m) \times (m-1)}{50 \times 49 \times 48}$ ，得

$$f(m) = m(50-m)(m-1) = -m^3 + 51m^2 - 50m$$

故  $b = 51$

	$(a, b)$ 與 $(c, d)$ 可能為	$(a, b, c, d)$ 的組合數
$ad = bc = 1$	(1, 1)	$1 \times 1 = 1$
$ad = bc = 2$	(1, 2)、(2, 1)	$2 \times 2 = 4$
$ad = bc = 4$	(1, 4)、(2, 2)、(4, 1)	$3 \times 3 = 9$
$ad = bc = 8$	(4, 2)、(2, 4)	$2 \times 2 = 4$
$ad = bc = 16$	(4, 4)	$1 \times 1 = 1$

$$P(\text{恰有一組解}) = P(ad \neq bc) = 1 - P(ad = bc)$$

$$= 1 - \frac{1+4+9+4+1}{3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{62}{81}$$

第貳部分：非選擇題

- (1) 如下圖 (2) 24 (3) 15

【詳解】

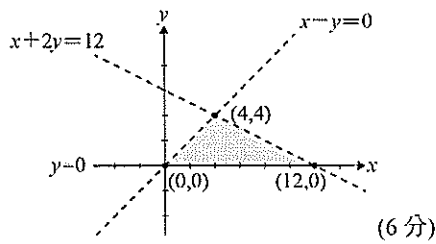
- 底數與真數皆大於 0

$\Rightarrow y > 0$ ，故底數比 1 大(沒寫出此句或沒寫出  $y+1 > 1$  扣 1 分)

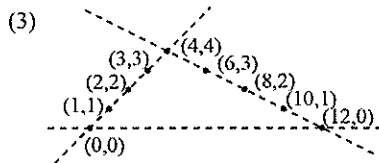
$$\Rightarrow 12 - 2y > x > y > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12-2y > x \\ x > y \\ y > 0 \end{cases}$$

故該圖形會圍成一個三角形如下圖(不含邊界)



(2) 如上圖：故面積為  $\frac{1}{2} \times 12 \times 4 = 24$  (3分)



(圖形有標示座標或者有代入方程組寫出正確過程佔2分)

當  $y=1$  時  $x=2, 3, \dots, 9$ ，

當  $y=2$  時  $x=3, 4, \dots, 7$ ，

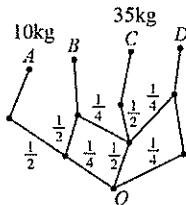
當  $y=3$  時  $x=4, 5$ ，

共有  $8+5+2=15$  組解。(算出正確答案佔3分)

二、(1) 10 (2)  $\frac{925}{4}$

【詳解】

(1) 如圖，



設  $X$  為取得的黃金公斤數，可得機率質量函數表：

	A	B	C	D
$X$	10	0	35	0
$p$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{8}$

(有畫出機率質量函數表佔1分)

(隨機變數  $X$  對應的機率有算出佔2分)

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{1}{4} + 35 \times \frac{1}{8} + 0 \times \frac{3}{8} = 10$$

(有列出期望值式子佔2分)

(算出正確答案佔2分)

$$\begin{aligned} (2) \text{Var}(x) &= (10-10)^2 \times \frac{1}{8} + (0-10)^2 \times \frac{1}{4} + (35-10)^2 \times \frac{1}{8} \\ &\quad + (0-10)^2 \times \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$= \frac{875}{4}$$

(有列出標準差的式子佔2分)

(算出正確答案佔3分)