數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(4)	(3)	(5)	(2)(4)	(1)(4)(5)	(2)(4)(5)	(3)(5)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理與勘根定理

解析：$\because f(-2)=f(1)=f(3)=3$

設 $f(x)=a(x+2)(x-1)(x-3)+3$

將 $f(-3)=-21$ 代入得 $f(-3)=a(-1)(-4)(-6)+3=-21 \Rightarrow a=1$

$\therefore f(x)=(x+2)(x-1)(x-3)+3$

利用勘根定理

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-21	3	11	9	3	-1	3

得在區間 $(-3,-2)$，$(1,2)$，$(2,3)$ 各有一實根

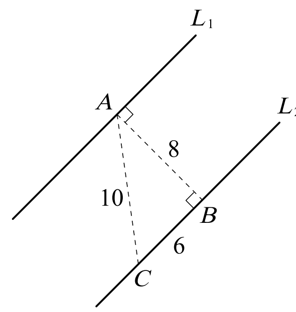
故 $f(x)=0$ 有三實根

故選(4)。

2. (3)

出處：第三冊第一章〈三角〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：三角函數與基本向量內積定義



解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAB=8\times10\times\dfrac{8}{10}=64$

故選(3)。

3. (5)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指、對數運算與估計近似值

解析：〈解法一〉

$n=2^{35}=2^{10}\times2^{10}\times2^{10}\times2^5\approx10^3\times10^3\times10^3\times32=3.2\times10^{10}=320$ 億

故選(5)。

〈解法二〉

Ct 值 $=35$ 時，$n=2^{35}$

取對數得 $\log 2^{35}\approx35\times0.3010=10.5350=10+0.5350$

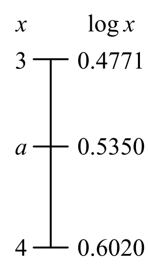
利用內插法，$\log 3\approx0.4771$，$\log a\approx0.5350$，$\log 4\approx0.6020$

得 $\dfrac{a-3}{4-3}\approx\dfrac{0.5350-0.4771}{0.6020-0.4771}=\dfrac{0.0579}{0.1249}\Rightarrow a\approx3.4636$

$\therefore \log 2^{35}\approx\log 10^{10}+\log 3.4636=\log(3.4636\times10^{10})$

因此 $2^{35}\approx3.4636\times10^{10}$

故選(5)。



二、多選題

4. (2)(4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：了解算術平均數、中位數、標準差的定義

解析：(1) ╳：第一天的 5 個值由小到大排序：65、75、80、85、95　$\therefore$ 中位數為 80

(2) ○：$\mu_1=80+\dfrac{1}{5}(-15-5+15+0+5)=80$

(3) ╳：將第二天已知的 5 個值由小到大排序：65、75、78、85、95 且已知中位數為 80

$\because \dfrac{1}{2}(78+85)=81.5\neq80$　$\therefore x$ 必落在 78 與 85 之間

$\dfrac{1}{2}(78+x)=80\Rightarrow x=82$

⑷ ○：承⑶，$\mu_2=80+\dfrac{1}{6}(-15-5+15-2+5+2)=80$

⑸ ╳：$\sigma_1=\sqrt{\dfrac{1}{5}[(65-80)^2+(75-80)^2+(95-80)^2+(80-80)^2+(85-80)^2]}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{5}(225+25+225+25)}=\sqrt{100}$

$\sigma_2=\sqrt{\dfrac{1}{6}[(65-80)^2+(75-80)^2+(95-80)^2+(78-80)^2+(85-80)^2+(82-80)^2]}$

$=\sqrt{\dfrac{1}{6}(225+25+225+4+25+4)}=\sqrt{\dfrac{254}{3}}<\sqrt{100}=\sigma_1$

故選⑵⑷。

5. ⑴⑷⑸

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：了解直線的基本性質

解析：⑴ ○：$y=kx-(3-k)\Rightarrow y=kx-3+k\Rightarrow y+3=k(x+1)$

$\therefore$恆過點 $(-1,-3)$

⑵ ╳：當 $x=0$ 時，$y=-3+k$；當 $x=5$，$y=6k-3$

$6k-3-(-3+k)=5k$ $\therefore$當 x 值增加 5 單位時，y 值增加 $5k$ 單位

⑶ ╳：$m_L=k$，$m_M=-\dfrac{3}{4}$

$\because L\perp M$ $\therefore m_L\times m_M=-1\Rightarrow k=\dfrac{4}{3}$

⑷ ○：① 若 $k\neq 0$，直線 L 與 x、y 軸交點分別為$\left(\dfrac{3-k}{k},0\right)$、$(0,k-3)$

$\because$不通過第一象限

$\therefore \dfrac{3-k}{k}<0\Rightarrow k(k-3)>0\Rightarrow k>3$ 或 $k<0$

且 $k-3<0\Rightarrow k<3$

故 $k<0$

② 若 $k=0$，直線 L 為 $y=-3$ 為水平線，且不通過第一象限

由①、②得 $k\leq 0$

⑸ ○：$\because P(1,1)$、$Q(3,9)$在 L：$kx-3+k-y=0$ 異側

$\therefore(k-3+k-1)(3k-3+k-9)<0$

$\Rightarrow(2k-4)(4k-12)<0\Rightarrow(k-2)(k-3)<0\Rightarrow 2<k<3$

故選⑴⑷⑸。

6. ⑵⑷⑸

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數及其圖形性質

解析：$\because$頂點為$\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{11}{2}\right)$ $\therefore f(x)=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}=-2x^2+6x+1$，因此 $p=6$，$q=1$

⑴ ╳：$p+q=7$

⑵ ○：$f(0)=1$，因此與 y 軸交點 $C(0,1)$

⑶ ╳：令 $f(x)=-2x^2+6x+1=0$，$x=\dfrac{-6\pm\sqrt{44}}{-4}=\dfrac{3\pm\sqrt{11}}{2}$

$\therefore \overline{AB}=\dfrac{3+\sqrt{11}}{2}-\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}=\sqrt{11}$

⑷ ○：$f\left(\dfrac{7}{2}\right)=-2\left(\dfrac{7}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{11}{2}=-\dfrac{5}{2}<0$

⑸ ○：$-2x^2+6x+1=-2x+9$，整理得$-2x^2+8x-8=0\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow(x-2)^2=0$

x 的解為兩相等實根 $\therefore$恰一交點

故選⑵⑷⑸。

7. (3)(5)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：計算隨機變數的機率函數與期望值

解析：(1) ╳：獎金最高為 180 元

(2) ╳：獎金為 60 元的機率為 $\dfrac{\overset{\text{60元1顆}}{\overset{\uparrow}{C_1^2}}\times \overset{\text{0元1顆}}{\overset{\uparrow}{C_1^2}}}{C_2^5}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$

(3) ○：獎金為 120 元的機率為 $\dfrac{\overset{\text{60元2顆}}{\overset{\uparrow}{C_2^2}}+\overset{\text{120元1顆，0元1顆}}{\overset{\uparrow}{C_1^2C_1^1}}}{C_2^5}=\dfrac{3}{10}$

(4) ╳：中獎的機率為 $1-\dfrac{\overset{\text{0元2顆}}{\overset{\uparrow}{C_2^2}}}{C_2^5}=\dfrac{9}{10}$

(5) ○：〈解法一〉

獎金的期望值為 $0\times\dfrac{1}{10}+60\times\dfrac{2}{5}+120\times\dfrac{3}{10}+180\times\dfrac{1}{5}=96$ (元)

〈解法二〉

獎金的期望值為 $2\left(0\times\dfrac{2}{5}+60\times\dfrac{2}{5}+120\times\dfrac{1}{5}\right)=96$ (元)

故選(3)(5)。

三、選填題

A. 18

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣和行列式的運算

解析：$\det A=a^2+(\sqrt{a})^2=a^2+a=6$

$\Rightarrow a^2+a-6=0\Rightarrow (a+3)(a-2)=0$

$\Rightarrow a=2$ 或 -3(不合)

$\therefore A=\begin{bmatrix}2 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 2\end{bmatrix}\Rightarrow A+2I=\begin{bmatrix}4 & -\sqrt{2}\\ \sqrt{2} & 4\end{bmatrix}$

$\therefore \det(A+2I)=4^2+(\sqrt{2})^2=18$。

B. $\dfrac{7}{47}$

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：清楚條件機率的定義，並能簡易運算

解析：P(初試失敗)$=\dfrac{5}{6}$，P(複試失敗)$=\dfrac{1}{6}\times\dfrac{7}{8}=\dfrac{7}{48}$

所求即為 P(複試失敗｜未錄取)$=\dfrac{\frac{7}{48}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{48}}=\dfrac{\frac{7}{48}}{\frac{47}{48}}=\dfrac{7}{47}$ 。

C. 12

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：了解何謂排列，能透過直線排列性質運算

解析：選豪宅的方式有兩種：

選①、③、⑤棟或選②、④、⑥棟

且甲、乙、丙排列數為 3!

所求即為 2×3!＝12 (種)。

第貳部分：非選擇題

一、⑴設準備 x 份蛋包飯與 y 杯奶茶，其中 x、y 為非負整數，不等式為 $\begin{cases}15x+10y\le 4500\\ x+2y\le 400\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x+2y\le 900\\ x+2y\le 400\end{cases}$，目標函數為 $15x+20y$；⑵略；⑶蛋包飯 250 份，奶茶 75 杯，最大淨利潤為 5250 元

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

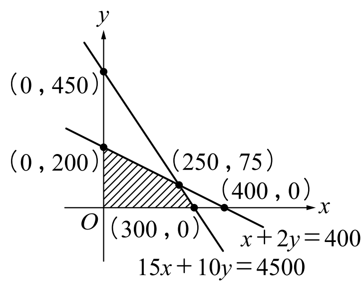
解析：⑴設社團應準備 x 份蛋包飯和 y 杯奶茶，其中 x、y 為非負整數

$\therefore$不等式為 $\begin{cases}15x+10y\le 4500\\ x+2y\le 400\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x+2y\le 900\\ x+2y\le 400\end{cases}$

目標函數為 $15x+20y$。

⑵由⑴的不等式，在坐標平面上畫出可行解區域如下：

(x，y 應為斜線區域(含邊界)中的格子點)



⑶〈解法一〉頂點法

由題意得可行解區域的四個頂點為 (0 , 0)，(0 , 200)，(250 , 75)，(300 , 0)

將可行解區域的頂點代入目標函數 $15x+20y$

列表寫出其對應的目標函數值如下

(x , y)	(0 , 0)	(0 , 200)	(250 , 75)	(300 , 0)
$15x+20y$	0	4000	5250	4500

$\therefore$此社團應準備蛋包飯 250 份，奶茶 75 杯，才可獲得最大淨利潤 5250 元。

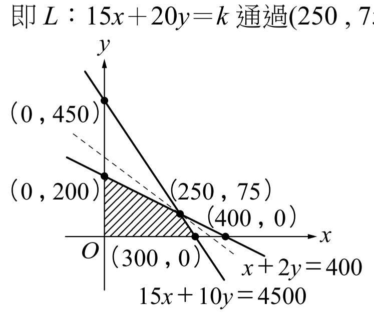
〈解法二〉平行線法

令直線 L：$15x+20y=k$

其斜率為 $-\dfrac{3}{4}$，介於 $-\dfrac{3}{2}$ 與 $-\dfrac{1}{2}$ 之間

由⑵的可行解區域，可得如下圖

即 L：$15x+20y=k$ 通過(250 , 75)，此時 $k=5250$



故此社團應準備蛋包飯 250 份，奶茶 75 杯，可得最大淨利潤 5250 元。

二、⑴減少，說明略；⑵西元 2024 年

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：使用對數簡化乘法計算

解析：⑴〈解法一〉

$\because 0.96\times1.08\times0.96=0.995328<1$

$\therefore$2003 年新生兒人口＜2000 年新生兒人口。

〈解法二〉

$\because \log(0.96\times1.08\times0.96)=\log 0.96+\log 1.08+\log 0.96\approx -0.002<0=\log 1$

$\therefore 0.96\times1.08\times0.96<1$

故 2003 年新生兒人口＜2000 年新生兒人口。

⑵每次看兩年，奇數年減少偶數年增加，每兩年增加為 0.96×1.08 倍

$\because (0.96\times 1.08)^n \ge \dfrac{150000}{100000}=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow n(\log 0.96+\log 1.08)\ge \log 3-\log 2$

$\Rightarrow n(-0.0177+0.0334)\ge 0.4771-0.3010 \Rightarrow n\times 0.0157\ge 0.1761 \Rightarrow n\ge 11.2$

取 $n=12$，故在西元 2024 年時新生兒人口首次大於 150,000 人。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、⑴設準備 x 份蛋包飯與 y 杯奶茶，其中 x、y 為非負整數，不等式為 $\begin{cases}15x+10y\le 4500\\ x+2y\le 400\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x+2y\le 900\\ x+2y\le 400\end{cases}$，目標函數為 $15x+20y$；⑵略；⑶蛋包飯 250 份，奶茶 75 杯，最大淨利潤為 5250 元

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

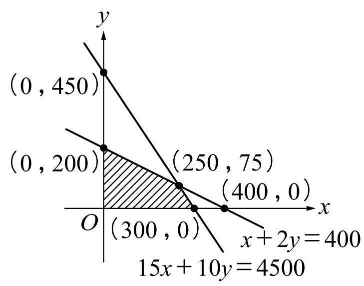
解析：⑴設社團應準備 x 份蛋包飯和 y 杯奶茶，其中 x、y 為非負整數

$\therefore$不等式為 $\begin{cases}15x+10y\le 4500\\ x+2y\le 400\end{cases}$ 或 $\begin{cases}3x+2y\le 900\\ x+2y\le 400\end{cases}$ (2 分)

目標函數為 $15x+20y$。(2 分)

⑵由⑴的不等式，在坐標平面上畫出可行解區域如下：

(x，y 應為斜線區域(含邊界)中的格子點)



(3 分)

⑶〈解法一〉頂點法

由題意得可行解區域的四個頂點為 $(0 , 0)$，$(0 , 200)$，$(250 , 75)$，$(300 , 0)$

將可行解區域的頂點代入目標函數 $15x+20y$

列表寫出其對應的目標函數值如下

(x , y)	$(0 , 0)$	$(0 , 200)$	$(250 , 75)$	$(300 , 0)$
$15x+20y$	0	4000	5250	4500

(2 分)

$\therefore$此社團應準備蛋包飯 250 份，奶茶 75 杯 (2 分)，才可獲得最大淨利潤 5250 元。(2 分)

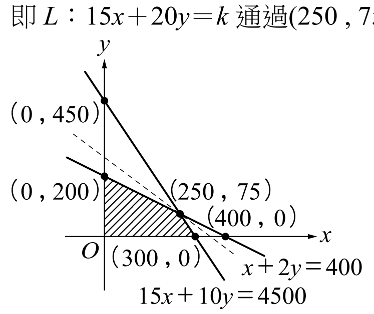
〈解法二〉平行線法

令直線 L：$15x+20y=k$

其斜率為 $-\dfrac{3}{4}$，介於 $-\dfrac{3}{2}$ 與 $-\dfrac{1}{2}$ 之間

由⑵的可行解區域，可得如下圖

即 L：$15x+20y=k$ 通過$(250 , 75)$，此時 $k=5250$ (2 分)



故此社團應準備蛋包飯 250 份，奶茶 75 杯 (2 分)，可得最大淨利潤 5250 元。(2 分)