數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(4)	(2)	(5)	(1)(4)(5)	(1)(2)(3)	(2)(3)(4)	(1)(3)(4)(5)		

第壹部分：選擇題

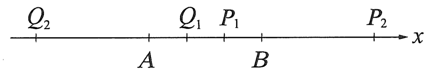
一、單選題

1. (4)

　出處：第一冊第一章〈數與式〉

　目標：數線上的幾何、分點公式

　解析：先假設 $A<B$，如右圖



$\overline{AQ_2}=\overline{AB}=\overline{BP_2}$、$\overline{AQ_1}=\overline{P_1Q_1}=\overline{BP_1}$，

P 點的可能位置為 P_1 與 P_2，

Q 點的可能位置為 Q_1 與 Q_2，

P、Q 兩點的距離可能為 $\overline{P_1Q_1}=\dfrac{1}{3}a$、$\overline{P_2Q_2}=3a$、$\overline{P_1Q_2}=\dfrac{5}{3}a$、$\overline{P_2Q_1}=\dfrac{5}{3}a$

同理，$A>B$ 的情形是相同的

故選(4)。

2. (2)

　出處：第二冊第三章〈機率〉

　目標：條件機率

　解析：設甲、乙、丙擲出的點數分別為 a、b、c

$a>b>c$ 的情形有 $C^6_3=20$ 種，

$a>b>c$ 且 $a+b+c=12$ 的情形有 $(6,5,1)$、$(6,4,2)$、$(5,4,3)$ 3 種

因此所求機率為 $\dfrac{3}{20}$

故選(2)。

3. (5)

　出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

　目標：餘式定理與因式定理

　解析：因為 $f(1)=f(2)=0 \Rightarrow f(x)$ 有因式 $(x-1)(x-2)$

設 $f(x)=a(x-1)(x-2)$，a 為非零實數

又 $f(x)$ 除以 $2x-1$ 的餘式為 6

則 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=6 \Rightarrow a\left(\dfrac{1}{2}-1\right)\left(\dfrac{1}{2}-2\right)=6 \Rightarrow a=8$

因此 $f(0)=8(0-1)(0-2)=16$

故選(5)。

二、多選題

4. (1)(4)(5)

　出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

　目標：古典機率、條件機率、期望值

　解析：(1) ○：$\dfrac{1+2+3+4+5}{5}+\dfrac{3+4+5+6+7}{5}=8$

(2) ╳：取出兩球編號同為 3 或同為 4 或同為 5，機率為 $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{3}{25}$

(3) ╳：$\dfrac{1}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}\times\dfrac{4}{5}+\dfrac{1}{5}\times1+\dfrac{1}{5}\times1=\dfrac{19}{25}$

(4) ○：兩球編號不同的機率為 $1-\dfrac{3}{25}=\dfrac{22}{25}$，

兩球編號不同且黑色球編號 1 號的機率為 $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{5}{5}=\dfrac{1}{5}$，所求機率為 $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{22}{25}}=\dfrac{5}{22}$

(5) ○：當黑色球編號 4 號、白色球任意：$\frac{1}{5}\times1=\frac{1}{5}$

當黑色球編號 2 號、白色球任意：$\frac{1}{5}\times1=\frac{1}{5}$

當黑色球編號不是 2、4 號且白色球編號 4 號：$\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{25}$

所求機率為 $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{25}=\frac{13}{25}$

故選(1)(4)(5)。

5. (1)(2)(3)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數的極值

解析：$f(x)=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}-12-4k$ 的最小值為 $-\frac{k^2}{4}-12-4k$

$-\frac{k^2}{4}-12-4k=-\frac{1}{4}(k+8)^2+4\leq4$

故選(1)(2)(3)。

6. (2)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉、第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：函數圖形的平移

解析：(1) ╳：因為直線斜率不同

(2) ○：因為二次函數的二次項係數相同

(3) ○：$y=x^3-3x^2+3x=(x-1)^3+1$，因此 S_1 往右平移 1 單位，再往上平移 1 單位，即可得到 S_2

(4) ○：$y=\log_2 3x=\log_2 x+\log_2 3$，因此 S_1 向上平移 $\log_2 3$ 單位，即可得到 S_2

(5) ╳：因為指數函數的底數不同，所以無法平移使兩圖形重合

故選(2)(3)(4)。

7. (1)(3)(4)(5)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：散佈圖與線性相關、最適直線(迴歸直線)

解析：(1) ○：$\frac{1+2+3+3+4+4+5+5+6+7}{10}=4$

(2) ╳：$\sqrt{\frac{(1-4)^2+(2-4)^2+2\times(3-4)^2+2\times(4-4)^2+2\times(5-4)^2+(6-4)^2+(7-4)^2}{10}}$

$=\sqrt{\frac{9+4+2\times1+2\times0+2\times1+4+9}{10}}=\sqrt{3}$，標準差為 $\sqrt{3}$ 小於 2

(3)(4)(5) ○：

												平均	總和
國	X	1	2	3	3	4	4	5	5	6	7	4	
數	Y	8	7	4	5	4	8	5	7	7	5	6	
	$X-4$	-3	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	3		
	$Y-6$	2	1	-2	-1	-2	2	-1	1	1	-1		
	$(X-4)^2$	9	4	1	1	0	0	1	1	4	9		30
	$(Y-6)^2$	4	1	4	1	4	4	1	1	1	1		22
	$(X-4)(Y-6)$	-6	-2	2	1	0	0	-1	1	2	-3		-6

$r=\frac{-6}{\sqrt{30}\sqrt{22}}\Rightarrow r<0$，且 $|r|=\frac{6}{\sqrt{660}}=\sqrt{\frac{36}{660}}=\sqrt{\frac{6}{110}}<\sqrt{\frac{9}{100}}=0.3$

L 的斜率為 $\frac{\sum_{i=1}^{10}(X_i-4)(Y_i-6)}{\sum_{i=1}^{10}(X_i-4)^2}=\frac{-6}{30}=-\frac{1}{5}=-0.2$

所以選項(3)(4)(5)正確

故選(1)(3)(4)(5)。

三、選填題

A. $(-2,3)$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：直線參數式、點到直線的距離

解析：設 $P(4-2t,t)$，P 點到直線 $3x-4y=2$ 的距離為 4

$$\Rightarrow \frac{|3(4-2t)-4t-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4 \Rightarrow |-10t+10|=20 \Rightarrow t=-1 \text{ 或 } t=3$$

$\Rightarrow P(6,-1)$ 或 $P(-2,3)$

又 P 點位在第二象限，故 $P(-2,3)$。

B. $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：隨機變數的標準差

解析：隨機變數 X 的機率分布表如下：

X	3	4	5
p_X	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

$$E(X)=3\times\frac{1}{3}+4\times\frac{1}{3}+5\times\frac{1}{3}=4$$

$$\mathrm{Var}(X)=\sum_{k=1}^{3}(x_k-E(X))^2\cdot p_k=(3-4)^2\times\frac{1}{3}+(4-4)^2\times\frac{1}{3}+(5-4)^2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sigma_X=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\text{。}$$

C. 11

出處：第三冊第三章〈平面向量〉、第四冊第三章〈矩陣〉

目標：向量內積與矩陣乘法

解析：$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} \Rightarrow ae+bf=5$、$ce+df=6 \Rightarrow \overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}=5$、$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=6$

$\Rightarrow (\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=5+6=11$。

第貳部分：非選擇題

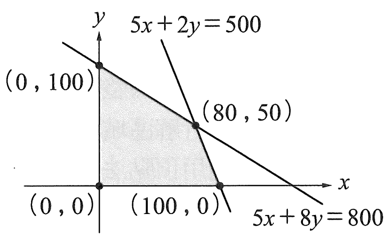
一、(1) $\begin{cases} 10x+4y\le 1000 \\ 5x+8y\le 800 \\ x\ge 0，y\ge 0 \\ x，y \text{ 為整數} \end{cases}$，$P(x,y)=50x+30y$；(2)圖略；(3) $x=80$，$y=50$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1) $\begin{cases} 10x+4y\le 1000 \\ 5x+8y\le 800 \\ x\ge 0，y\ge 0 \\ x，y \text{ 為整數} \end{cases}$，$P(x,y)=50x+30y$。

(2) $\begin{cases} 10x+4y\le 1000 \\ 5x+8y\le 800 \\ x\ge 0，y\ge 0 \\ x，y \text{ 為整數} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y\le 500 \\ 5x+8y\le 800 \\ x\ge 0，y\ge 0 \\ x，y \text{ 為整數} \end{cases}$



可行解區域如右圖，(x,y) 應為灰色區域(含邊界)中的格子點。

(3)利用頂點法：

$(x,y)=(0,0) \Rightarrow P(0,0)=0$

$(x,y)=(100,0) \Rightarrow P(100,0)=5000$

$(x,y)=(0,100) \Rightarrow P(0,100)=3000$

$(x,y)=(80,50) \Rightarrow P(80,50)=50\times 80+30\times 50=5500$

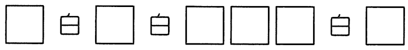
故當 $x=80$、$y=50$ 時，$P(x,y)$ 有最大值 5500。

二、⑴ 300 種；⑵ $n=-3$，a 的整數部分為 3

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：科學記號、有相同物排列、二項分布

解析：⑴有三個人取兩球，這三個人的位置有 C_3^6 種，右圖是取兩球者位置的一種情形



因為有兩人中獎，剩下六個位置填入 2 紅球、4 黑球，方法有 $\dfrac{6!}{2!\,4!}$ 種

故所求為 $C_3^6\times\dfrac{6!}{2!\,4!}=20\times15=300$ 種情形。

⑵中獎的兩種情形：

第一次就取中紅球：$\dfrac{1}{4}$

第一次取中白球且第二次取中紅球：$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{12}$

故中獎的機率為 $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{3}$

$p=C_1^{20}\left(\dfrac{1}{3}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{19}=10\times\left(\dfrac{2}{3}\right)^{20}$

$\log p=\log 10+20\log\dfrac{2}{3}=1+20(\log 2-\log 3)$

$\approx 1+20(0.3010-0.4771)=-2.522=-3+0.478$

又由 $p=a\times10^n \Rightarrow \log p=\log(a\times10^n)=n+\log a$

$\Rightarrow n=-3$ 且 $\log a=0.478$

由 $\log 3<0.478<\log 4 \Rightarrow a$ 的整數部分為 3。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、⑴ $\begin{cases}10x+4y\le1000\\5x+8y\le800\\x\ge0，y\ge0\\x，y \text{ 為整數}\end{cases}$，$P(x,y)=50x+30y$；⑵圖略；⑶ $x=80$，$y=50$

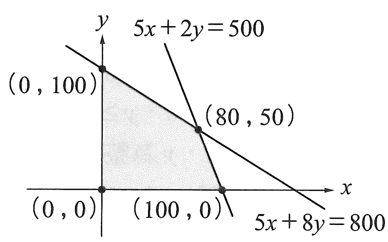
出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：⑴ $\begin{cases}10x+4y\le1000\\5x+8y\le800\\x\ge0，y\ge0\\x，y \text{ 為整數}\end{cases}$，(3 分)

$P(x,y)=50x+30y$。(1 分)

⑵ $\begin{cases}10x+4y\le1000\\5x+8y\le800\\x\ge0，y\ge0\\x，y \text{ 為整數}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x+2y\le500\\5x+8y\le800\\x\ge0，y\ge0\\x，y \text{ 為整數}\end{cases}$



可行解區域如右圖，(x,y) 應為灰色區域(含邊界)中的格子點。(4 分)

⑶利用頂點法：

$(x,y)=(0,0) \Rightarrow P(0,0)=0$

$(x,y)=(100,0) \Rightarrow P(100,0)=5000$

$(x,y)=(0,100) \Rightarrow P(0,100)=3000$

$(x,y)=(80,50) \Rightarrow P(80,50)=50\times80+30\times50=5500$

故當 $x=80$、$y=50$ 時，$P(x,y)$ 有最大值 5500。(4 分)