

數學乙考科詳解

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.
(4)	(2)	(1)	(5)	(3)	(1)	(1)(2)(3)(4)(5)
8.	9.					
(1)(2)(3)(4)	(2)(3)(4)					

第壹部分、選擇（填）題

一、單選題

1. (4)

出處：第三冊 A〈三角函數〉、

第三冊 B〈正弦函數與週期性現象〉

目標：能正確找出三角函數的最大值

解析：對任意實數 x 而言， $-1 \leq \sin x \leq 1$ ，

(1) $\sin x = 1$ 時， $y = \sqrt{2} \sin x$ 的最大值為 $\sqrt{2}$

(2) $\sin x = 1$ 時， $y = \sqrt{2} + \sin x$ 的最大值為 $\sqrt{2} + 1$

(3) $\sin(\sqrt{2}x) = 1$ 時， $y = \sin(\sqrt{2}x)$ 的最大值為 1

(4) $\sin \frac{x}{\sqrt{2}} = 1$ 時， $y = \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$ 的最大值為 $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

(5) $\sin(\sqrt{2}x) = 1$ 時， $y = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x)$ 的最大值為 $\sqrt{2}$ 故選(4)。

2. (2)

出處：第一冊〈數與式〉

目標：依題意列出不等式並求解

解析：依題意，左側的 5 公克砝碼數有 x 個，右側的 3 公克砝碼數有 $x+2$ 個

依題意列式：

$$|5x - 3(x+2)| \leq 2 \Rightarrow |2x - 6| \leq 2$$

$$\Rightarrow -2 \leq 2x - 6 \leq 2 \Rightarrow 2 \leq x \leq 4$$

$\Rightarrow x = 2, 3, 4$ ，故有 3 種可能，故選(2)。

3. (1)

出處：第四冊 A〈空間向量〉、

第四冊 B〈空間概念與空間坐標系〉

目標：能正確找出空間中的長度

解析：設正立方體的邊長為 a

$$\overline{ER} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{3}{2}a$$

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\therefore \frac{\overline{ER}}{\overline{PQ}} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{2}，故選(1)。$$

4. (5)

出處：第一冊〈指數、對數〉

目標：能將 2 為底或 3 為底的指數化為 10 為底的指數並比較大小

解析： $2^{31} \approx (10^{0.3010})^{31} = 10^{9.331}$ ， $3^{21} \approx (10^{0.4771})^{21} = 10^{10.0191}$ ，

$$\frac{3^{21}}{2^{31}} = \frac{10^{10.0191}}{10^{9.331}} = 10^{0.6881} \approx 10^{0.6990} = 5$$

故選(5)。

5. (3)

出處：第一冊〈多項式函數〉、第一冊〈直線與圓〉

目標：能找出三次函數的中心坐標，點在圓內、圓外或圓上的判斷，二次不等式求解

解析：令 $\Gamma: f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + n - 1 = (x-h)^3 + p(x-h) + k$ ，

$$h = \frac{-(-3)}{3 \times 1} = 1, k = f(1) = n + 2,$$

故對稱中心為 $(1, n+2)$

將圓配方得 $C: (x-n)^2 + y^2 = 45$ ，圓心 $(n, 0)$

依題意列式：

$$\sqrt{(n-1)^2 + (n+2)^2} \leq \sqrt{45}$$

$$\Rightarrow 2n^2 + 2n + 5 \leq 45 \Rightarrow n^2 + n - 20 \leq 0$$

$$\Rightarrow (n+5)(n-4) \leq 0 \Rightarrow -5 \leq n \leq 4$$

又 n 為整數 $\therefore n$ 有 10 個，故選(3)。

6. (1)

出處：第二冊〈三角比〉

目標：能利用圖形找出正確的三角比

解析：不失一般性，設正方形的邊長為 2，

$$\overline{BA'} = \overline{A'C} = 1, \text{ 設 } \overline{A'E} = x, \text{ 則 } \overline{BE} = 2 - x$$

$$\text{利用畢式定理 } \overline{A'E}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{BE}^2 \Rightarrow x^2 = 1^2 + (2-x)^2$$

$$\text{解得 } \overline{A'E} = x = \frac{5}{4}, \overline{BE} = 2 - x = \frac{3}{4}$$

$$\text{得 } \cos \angle BA'E = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \overline{D'F} \parallel \overline{A'E}, \overline{DF} \parallel \overline{AE},$$

$$\text{故 } \cos \angle D'FD = \cos \angle A'EA, \angle A'EB + \angle A'EA = 180^\circ,$$

$$\therefore \cos \angle D'FD = \cos \angle A'EA = -\cos \angle A'EB = -\frac{3}{5},$$

$$\cos \angle BA'E + \cos \angle D'FD = \frac{4}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

故選(1)。

二、多選題

7. (1)(2)(3)(4)(5)

出處：第四冊 A〈矩陣〉、第四冊 B〈矩陣與資料表格〉

目標：矩陣的乘法運算

解析：依題意， PQ 可轉為表格如下：

	原料費用	廣告費用	人事成本	其他費用
春季	*	*	*	*
夏季	*	*	*	*
秋季	*	*	*	*
冬季	*	*	*	*

(1) ○：矩陣乘積 PQ 表示四季與各項費用之間的關係，為一個 4×4 階矩陣

(2) ○：矩陣乘積 PQ 的第一行中的元表示四季(春季、夏季、秋季、冬季)的原料費用

(3) ○：矩陣乘積 PQ 的第二列中的元表示夏季的各項費用(原料費用、廣告費用、人事成本、其他費用)

(4) ○：矩陣乘積 PQ 的第四行中的所有元表示四個季節的其他費用，其總和表示公司該年其他費用的總和

- (5) ○：因為支出為原料費用、廣告費用、人事成本、其他費用的總和，
第一列元的總和為春季的支出，
第二列元的總和為夏季的支出，
第三列元的總和為秋季的支出，
第四列元的總和為冬季的支出，
故矩陣乘積 PQ 的所有元總和表示公司該年的所有支出總和

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

8. (1)(2)(3)(4)

出處：第三冊 A〈指數與對數函數〉、

第三冊 B〈按比例成長模型〉

目標：能正確使用對數的性質

解析：依題意，我們可得關係式 $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T(n)}{10}}$

$$\Rightarrow n = 2^{\frac{T(n)}{10}}$$

$$\Rightarrow T(n) = 10 \times \log_2 n = 10 \times \frac{\log n}{\log 2}$$

(1) ○：將 $n=4$ 代入

$$\text{得 } T(4) = 10 \times \frac{\log 4}{\log 2} = 10 \times 2 = 20$$

(2) ○：將 $n=3$ 代入

$$\text{得 } T(3) = 10 \times \frac{\log 3}{\log 2} \approx 10 \times \frac{0.4771}{0.3010} > 15$$

(3) ○：將 $n=5$ 代入

$$\begin{aligned} \text{得 } T(5) &= 10 \times \frac{\log 5}{\log 2} \approx \frac{10 \times 0.6990}{0.3010} \\ &\approx \frac{70}{3} \approx 23.3 \end{aligned}$$

將 $n=8$ 代入

$$\text{得 } T(8) = 10 \times \frac{\log 8}{\log 2} = 10 \times 3 = 30$$

$$\therefore T(3) + T(5) > T(8)$$

$$(4) \bigcirc : T(27) = 10 \times \frac{\log 27}{\log 2} = 10 \times \frac{\log 3^3}{\log 2} = 10 \times \frac{3 \log 3}{\log 2}$$

$$= 3 \times \left(10 \times \frac{\log 3}{\log 2} \right) = 3T(3)$$

$$(5) \times : \frac{T(5)}{T(3)} = \frac{10 \times \frac{\log 5}{\log 2}}{10 \times \frac{\log 3}{\log 2}} = \frac{\log 5}{\log 3} \neq \log 5 - \log 3$$

故選(1)(2)(3)(4)。

9. (2)(3)(4)

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：一次微分與二次微分的性質

解析：(1) $\times : f'(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2, f'(-1) = 0$,

在 $x > -1$ 與 $x < -1$ 時, $f'(x) > 0$

故不存在極值

(2) ○ : $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$,

$$f'(-3) = f'(1) = 0,$$

且 x 在 -3 左右時 $f'(x)$ 的正負不同,

x 在 1 左右時 $f'(x)$ 的正負不同,

故 $y=f(x)$ 有 2 個極值

$$f''(x) = 2(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

x 在 -1 左右時 $f''(x)$ 的正負不同,

x	-3	-1	1
$f'(x)$	+	0	-
$f''(x)$	-	0	+

故 $y=f(x)$ 有一個反曲點

(3) ○ : $f''(x) = x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

x 在 -1 左右時 $f''(x)$ 的正負不同

故 $y=f(x)$ 有一個反曲點

(4) ○ : $f''(x) = x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ 或 } -3$$

且 x 在 1 左右時 $f''(x)$ 的正負不同,

x 在 -3 左右時 $f''(x)$ 的正負不同,

故 $y=f(x)$ 有 2 個反曲點

(5) $\times : f''(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$, 且 x 在 -1 左右時

$f''(x)$ 的正負相同, 故無反曲點

故選(2)(3)(4)。

三、選填題

10. 630

出處：第二冊〈排列組合與機率〉

目標：能使用相異物的直線排列，有相同物的直線排列，組合，加法原理等

$$\text{解析：} P_2^{10} \times \frac{4!}{1!3!} + C_2^{10} \times \frac{4!}{2!2!}$$

$$= 360 + 270 = 630 \text{ 種。}$$

〔另解〕

選出數字的方法有 $C_2^{10} = 45$ 種，

再由 $AAAB$ 的排列數為 4， $ABBB$ 的排列數為 4，

$AABB$ 的排列數為 6，

可得共有 $45 \times (4 + 4 + 6) = 630$ 種。

11. (11, 6)

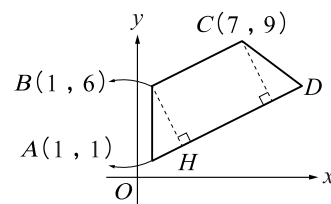
出處：第三冊 A〈平面向量〉、第三冊 B〈平面向量與應用〉

目標：能使用正射影，向量的加減法

解析： $\overrightarrow{AB} = (0, 5)$, $\overrightarrow{BC} = (6, 3)$,

$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的正射影為

$$\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|^2} \overrightarrow{BC} = \frac{15}{45} (6, 3) = (2, 1)$$



設 B 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影點為 H , 則 $\overrightarrow{AH} = (2, 1)$,

$$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}$$

$$= 2(2, 1) + (6, 3) = (10, 5)$$

故 D 點坐標為 $(1, 1) + (10, 5) = (11, 6)$ 。

〔另解〕

$$m_{BC} = \frac{9-6}{7-1} = \frac{1}{2}, \text{ 求得直線 } BC \text{ 的方程式為}$$

$$x - 2y = -11$$

過 B 且垂直 $\overline{BC}$ 的直線方程式為 $2x+y=8$
 過 A 且平行 $\overline{BC}$ 的直線方程式為 $x-2y=-1$
 設 B 在 $\overrightarrow{AD}$ 上的投影點為 H ，解得 $H(3, 2)$
 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{BC}$
 $= 2(2, 1) + (6, 3) = (10, 5)$
 故 D 點坐標為 $(1, 1) + (10, 5) = (11, 6)$ 。

12. $\frac{4}{9}$

出處：第四冊 A〈機率〉、第四冊 B〈機率〉

目標：能找出樣本空間並求出條件機率

解析：設樣本空間為把 40 杯飲料依序分完，最後 2 杯為小義的， $n(S)=40!$

小義有拿到珍珠奶茶，因此最後 2 杯的情形為
 (珍, 珍)，(珍, 多)，(多, 珍)

機率為 $\frac{25 \times 24 \times 38! + 25 \times 15 \times 38! + 15 \times 25 \times 38!}{40!} = \frac{45}{52}$

拿了 2 杯珍珠奶茶的機率為 $\frac{25 \times 24 \times 38!}{40!} = \frac{5}{13}$

故所求之條件機率為 $\frac{\frac{5}{13}}{\frac{45}{52}} = \frac{4}{9}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

13. (1)

出處：選修數學乙(上)〈微分〉

目標：瞭解導函數的意義

解析：由題圖可看出三次函數在 $0 \leq x \leq 1$ ， $1 \leq x \leq 3$ 的範圍內
 各有 1 個值，使得 $f'(x)=0$ ，故選(1)。

14. $a = \frac{-1}{6}$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = \frac{-1}{3}$ ， $d = 1$

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：可依題意求出三次函數

解析：設 $f(x) = a(x-1)^3 + p(x-1) + 1$ ，

將 $(3, 0)$ 代入得 $8a + 2p + 1 = 0$ ，

將 $(0, 1)$ 代入得 $-a - p + 1 = 1$ ，

解得 $a = \frac{-1}{6}$ ， $p = \frac{1}{6}$ ，

$f(x) = \frac{-1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1) + 1$

$= \frac{-1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{3}x + 1$

得 $a = \frac{-1}{6}$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = \frac{-1}{3}$ ， $d = 1$ 。

◎評分原則

設 $f(x) = a(x-1)^3 + p(x-1) + 1$ ， (1 分)

將 $(3, 0)$ 代入得 $8a + 2p + 1 = 0$ ，

將 $(0, 1)$ 代入得 $-a - p + 1 = 1$ ，

解得 $a = \frac{-1}{6}$ ， $p = \frac{1}{6}$ ， (2 分)

$f(x) = \frac{-1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1) + 1$ (1 分)

$= \frac{-1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{3}x + 1$

得 $a = \frac{-1}{6}$ ， $b = \frac{1}{2}$ ， $c = \frac{-1}{3}$ ， $d = 1$ 。 (1 分)

15. $\frac{21}{8}$

出處：選修數學乙(上)〈積分〉

目標：可用微積分求出曲線下的面積

解析： $\int_0^3 \left(\frac{-1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{3}x + 1 \right) dx$

$= \left(\frac{-1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{-1}{6}x^2 + x \right) \Big|_0^3$

$= \frac{21}{8}$ 。

◎評分原則

$\int_0^3 \left(\frac{-1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{-1}{3}x + 1 \right) dx$ (3 分)

$= \left(\frac{-1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{-1}{6}x^2 + x \right) \Big|_0^3$

$= \frac{21}{8}$ 。 (2 分)

16. (1)

出處：第一冊〈多項式函數〉

目標：利用不等式解決生活中的問題

解析：假設小芯的 100 個評價共累積了 n 顆星，

$4.825 \leq \frac{n}{100} < 4.835$

$\Rightarrow 100 \times 4.825 \leq n < 100 \times 4.835$

$\Rightarrow 482.5 \leq n < 483.5 \Rightarrow n = 483$

表示在 100 個評價共 500 顆星中已累積了 483 顆星

假設須至少再連續累積 x 個 5 星評價，依題意列式：

$\frac{483 + 5x}{100 + x} \geq 4.945$

$\Rightarrow 483 + 5x \geq 494.5 + 4.945x$

$\Rightarrow 0.055x \geq 11.5$

$\Rightarrow x \geq 209.09$ ， x 至少為 210 個

故選(1)。

17. 0.25

出處：第二冊〈數據分析〉、選修數學乙(上)〈極限與函數〉

目標：可求出相關係數

解析： $\mu_X = \frac{1}{8}(100 + 200 + 300 + 200 + 100 + 200 + 200 + 300)$

$= 200$ ，

$\mu_Y = \frac{1}{8}(5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 5 + 3 + 5) = 4.5$

$X - \mu_X$	-100	0	100	0
$Y - \mu_Y$	0.5	-0.5	0.5	0.5
$X - \mu_X$	-100	0	0	100
$Y - \mu_Y$	-0.5	0.5	-1.5	0.5

求出

$S_{XX} = \sum_{i=1}^8 (x_i - \mu_X)^2 = 40000$ ，

$S_{YY} = \sum_{i=1}^8 (y_i - \mu_Y)^2 = 4$ ，

$S_{XY} = \sum_{i=1}^8 (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = 100$

$\therefore r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}} = \frac{100}{\sqrt{40000} \times \sqrt{4}} = 0.25$ 。

◎評分原則

$$\mu_X = \frac{1}{8}(100+200+300+200+100+200+200+300)=200,$$
$$\mu_Y = \frac{1}{8}(5+4+5+5+4+5+3+5)=4.5 \quad (1 \text{ 分})$$

$X-\mu_X$	-100	0	100	0
$Y-\mu_Y$	0.5	-0.5	0.5	0.5
$X-\mu_X$	-100	0	0	100
$Y-\mu_Y$	-0.5	0.5	-1.5	0.5

(1 分)

求出

$$S_{XX} = \sum_{i=1}^8 (x_i - \mu_X)^2 = 40000, \quad (1 \text{ 分})$$
$$S_{YY} = \sum_{i=1}^8 (y_i - \mu_Y)^2 = 4, \quad (1 \text{ 分})$$
$$S_{XY} = \sum_{i=1}^8 (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y) = 100 \quad (1 \text{ 分})$$
$$\therefore r = \frac{S_{XY}}{\sqrt{S_{XX}}\sqrt{S_{YY}}} = \frac{100}{\sqrt{40000} \times \sqrt{4}} = 0.25. \quad (1 \text{ 分})$$

18. $y = \frac{1}{400}x + 4$

出處：第二冊〈數據分析〉

目標：可求出最適直線

解析：依最適直線的公式

$$y - 4.5 = 0.25 \times \frac{\sqrt{\frac{4}{8}}}{\sqrt{\frac{40000}{8}}} (x - 200)$$
$$\Rightarrow y - 4.5 = \frac{1}{400} (x - 200), \text{ 得 } y = \frac{1}{400}x + 4.$$

◎評分原則

依最適直線的公式

$$y - 4.5 = 0.25 \times \frac{\sqrt{\frac{4}{8}}}{\sqrt{\frac{40000}{8}}} (x - 200)$$
$$\Rightarrow y - 4.5 = \frac{1}{400} (x - 200), \quad (2 \text{ 分})$$

得 $y = \frac{1}{400}x + 4.$ (2 分)