

北北基高中 114 年(113 學年度)高三下第五次 分科測驗模擬考數學(數乙)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題

一、單選題

1. 試問下列哪一個三角函數的最大值為所有選項中最大？

(1) $y = \sqrt{2} \sin x$

(2) $y = \sqrt{2} + \sin x$

(3) $y = \sin(\sqrt{2}x)$

(4) $y = \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{\sqrt{2}}$

(5) $y = \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}x)$

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(4)

解：(1) 當 $\sin x = 1$ ， $Max = \sqrt{2}$

(2) 當 $\sin x = 1$ ， $Max = \sqrt{2} + 1$

(3) 當 $\sin(\sqrt{2}x) = 1$ ， $Max = 1$

(4) 當 $\sin \frac{x}{\sqrt{2}} = 1$ ， $Max = 2\sqrt{2}$

(5) 當 $\sin(\sqrt{2}x) = 1$ ， $Max = \sqrt{2}$

2. 一天秤的秤臺上，左側放置 5 公克的砝碼若干個，右側放置 3 公克的砝碼若干個，設左側 5 公克的砝碼數為 x 個，右側 3 公克的砝碼數比左側 5 公克的砝碼數多 2 個。若左右兩側的總重量誤差在 2 公克以下（含 2 公克），試問 x 的值有幾種可能？

(1) 2 種 (2) 3 種 (3) 4 種 (4) 5 種 (5) 6 種

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(2)

解： $|5x - 3(x+2)| \leq 2 \Rightarrow |2x - 6| \leq 2 \Rightarrow |x - 3| \leq 1$

$\Rightarrow 4 \leq x \leq 6 \xrightarrow{x \in N} x = 4, 5, 6$

3. 正立方體 $ABCD-EFGH$ 中， P 為 $\overline{FG}$ 的中點， Q 為 $\overline{CD}$ 的中點，

R 為 $\overline{BC}$ 的中點，求 $\frac{\overline{ER}}{\overline{PQ}} = ?$

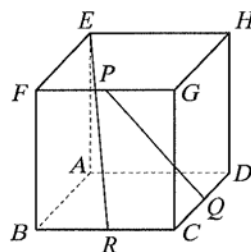
(1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

(4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(5) 2



【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(1)

解：令 $A(0,0,0)$ ， $B(2,0,0)$ ， $D(0,2,0)$ ， $C(2,2,0)$

則 $E(0,0,2)$ ， $F(2,0,2)$ ， $H(0,2,2)$ ， $G(2,2,2)$

故 $P(2,1,2)$ ， $Q(1,2,0)$ ， $R(2,1,0)$

$$\overline{ER} = \sqrt{4+1+4} = 3, \quad \overline{PQ} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}, \quad \text{比值} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

解：令棱長為 a

$$\Rightarrow \overline{ER} = \sqrt{a^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}}a, \overline{PQ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4}}a$$

$$\frac{\overline{ER}}{\overline{PQ}} = \sqrt{\frac{9}{6}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

4. 李老師將拿出 1、2、3 共 3 張字卡要同學拼出大家認識的最大整數，Apple 同學說 321 最大，Banana 同學發現 2^{31} 更大，Coconut 同學接著說 3^{21} 才是最大！依你對指數與對數的認識，選出下列最正確的敘述。

- (1) 2^{31} 是 3^{21} 的 $\frac{1}{2}$ 倍至 2 倍之間 (2) 2^{31} 的值大約是 3^{21} 的 3 倍
 (3) 2^{31} 的值大約是 3^{21} 的 5 倍 (4) 3^{21} 的值大約是 2^{31} 的 3 倍
 (5) 3^{21} 的值大約是 2^{31} 的 5 倍

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(5)

解： $\frac{3^{21}}{2^{31}} \doteq \frac{10^{0.4771 \times 21}}{10^{0.3010 \times 31}} \doteq \frac{10^{10.0191}}{10^{9.331}} \doteq 10^{0.6881} \doteq 10^{\log 5} \neq 5$

5. 設 n 為一整數，三次函數 $\Gamma: f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + n - 1$,

圓 $C: x^2 + y^2 - 2nx + n^2 - 45 = 0$ ，若 Γ 的對稱中心落在圓 C 上或圓 C 內，求滿足的整數 n 值有幾個？

- (1) 8 個 (2) 9 個 (3) 10 個 (4) 11 個 (5) 12 個

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(3)

解： $f(x) = (x-1)^3 + 2(x-1) + (n+2)$ ，對稱中心 $(1, n+2)$

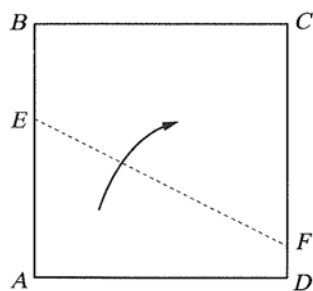
$C: (x-n)^2 + y^2 = 45$ ，表圓心 $(n, 0)$ ，半徑 $\sqrt{45}$

對稱中心在圓上或圓內

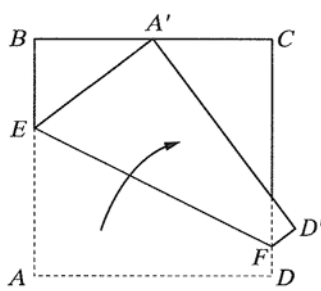
$$\text{故 } \sqrt{(n-1)^2 + (n+2)^2} \leq \sqrt{45} \Rightarrow 2n^2 + 2n - 40 \leq 0 \Rightarrow 2(n+5)(n-4) \leq 0$$

$$\xrightarrow{n \in \mathbb{Z}} n = -5, -4, -3, \dots, 1, 2, 3, 4 \text{ 共 10 解}$$

6. 將一正方形紙片沿虛線 EF 往上摺（如圖(一)所示）並壓平，使得原來的 A 點落在 BC 的中點 A' 處，此時 D 點成為 D' 點（如圖(二)所示）。求此時 $\cos \angle BA'E + \cos \angle D'FD = ?$



圖(一)



圖(二)

- (1) $\frac{1}{5}$ (2) $-\frac{1}{5}$ (3) 0 (4) $\frac{7}{5}$ (5) 以上皆非

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(1)

解：令正方形邊長 2， $\overline{BE} = x \Rightarrow \overline{BA'} = 1$ ， $\overline{EA'} = \overline{EA} = 2 - x$
 $\Rightarrow (2 - x)^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

令 $\angle BA'E = \theta \Rightarrow \angle D'FD = 90^\circ + \theta$ ，且 $\cos \theta = \frac{1}{2 - \frac{3}{4}} = \frac{4}{5}$

所求 $= \cos \theta + \cos(90^\circ + \theta) = \cos \theta - \sin \theta = \frac{4}{5} - \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$

二、多選題

7. 超好穿服飾公司的支出為原料費用、廣告費用、人事成本、其他費用的總和。該公司統計 113 年度的各季各產品的生產量及各項費用的資料整理如下表：

各產品各季生產量

	衣服 (件)	褲子 (件)	鞋子 (雙)
春季	3234	6234	2422
夏季	5834	2230	3860
秋季	4212	4233	4020
冬季	3436	2612	2220

生產單位產品的各項費用（單位：元）

	原料費用	廣告費用	人事成本	其他費用
衣服(件)	500	50	70	300
褲子(件)	420	40	80	200
鞋子(雙)	1000	100	90	600

將上述表格轉為矩陣 $P = \begin{bmatrix} 3234 & 6234 & 2422 \\ 5834 & 2230 & 3860 \\ 4212 & 4233 & 4020 \\ 3436 & 2612 & 2220 \end{bmatrix}$ ， $Q = \begin{bmatrix} 500 & 50 & 70 & 300 \\ 420 & 40 & 80 & 200 \\ 1000 & 100 & 90 & 600 \end{bmatrix}$ ，

下列敘述哪些是正確的？

(1) 矩陣乘積 PQ 是一個 4×4 階矩陣

(2) 矩陣乘積 PQ 的第一行中的元表示四季（春季、夏季、秋季、冬季）的原料費用

(3) 矩陣乘積 PQ 的第二列中的元表示夏季的各項費用（原料費用、廣告費用、人事成本、其他費用）

(4) 矩陣乘積 PQ 的第四行中的所有元總和表示公司 113 年度其他費用的總和

(5) 矩陣乘積 PQ 的所有元總和表示公司 113 年度的支出總和 【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(1)(2)(3)(4)(5)

解： $P_{4 \times 3} \times Q_{3 \times 4} = (PQ)_{4 \times 4} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{原} & \text{廣} & \text{人} & \text{他} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{春} \\ \text{夏} \\ \text{秋} \\ \text{冬} \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \end{matrix}_{4 \times 4}$

8. 「放射性物質的半衰期 T 為該物質衰變至原物質質量的一半所需要的時間」，即經過一個半衰期的時間之後，其放射性物質的質量會只剩原來的一半。小旻依據這樣的說法，自創

了一個「 $\frac{1}{n}$ 衰期 $T(n)$ 」的想法，即「放射性物質的 $\frac{1}{n}$ 衰期： $T(n)$ 為該物質衰變至原物質質量的 $\frac{1}{n}$ 所需要的時間」。依照小旻的表示法， $\frac{1}{2}$ 衰期： $T(2)$ 為該物質衰變至原物質質量的 $\frac{1}{2}$ 所需要的時間，即為半衰期。今假設某放射性物質的半衰期為 10 年，即 $T(2)=10$ ，則下列敘述哪些是正確的？

(1) $T(4)=20$

(2) $T(3)>15$

(3) $T(3)+T(5)>T(8)$

(4) $T(27)=3T(3)$ (5) $\frac{T(5)}{T(3)}=\log 5-\log 3$

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(1)(2)(3)(4)

解： $\frac{1}{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{T(n)}{10}} \Rightarrow n=2^{\frac{T(n)}{10}} \Rightarrow \log_2 n=\frac{T(n)}{10} \Rightarrow T(n)=10\log_2 n$

(1) $T(4)=10\log_2 4=20$

(2) $T(3)=10\log_2 3=10\times\frac{0.4771}{0.3010}>15$

(3) $T(3)+T(5)=10(\log_2 3+\log_2 5)=10\log_2 15>T(8)=10\log_2 8$

(4) $T(27)=10\log_2 27=30\log_2 3=3T(3)$

(5) $\frac{T(5)}{T(3)}=\frac{10\log_2 5}{10\log_2 3}=\frac{\log 5}{\log 3}\neq\log 5-\log 3$

9. 下列有關可微分函數 $y=f(x)$ 極值與反曲點的敘述，哪些是正確的？

(1) 若可微分函數 $y=f(x)$ 滿足 $f'(x)=x^2+2x+1$ ，則 $y=f(x)$ 有 1 個極值

(2) 若可微分函數 $y=f(x)$ 滿足 $f'(x)=x^2+2x-3$ ，則 $y=f(x)$ 有 2 個極值，且有 1 個反曲點

(3) 若可微分函數 $y=f(x)$ 滿足 $f''(x)=x+1$ ，則 $y=f(x)$ 有 1 個反曲點

(4) 若可微分函數 $y=f(x)$ 滿足 $f''(x)=x^2+2x-3$ ，則 $y=f(x)$ 有 2 個反個曲點

(5) 若可微分函數 $y=f(x)$ 滿足 $f''(x)=x^2+2x+1$ ，則 $y=f(x)$ 有 1 個反曲點

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(2)(3)(4)

解：(1) 無極值 (5) 無反曲點

三、選填題

10. 小芯有一個 4 位數字的密碼鎖，每個數字變化皆為 0、1、2、……、9（即密碼鎖的數字變化為 0000~9999）。她之前設定了一個密碼，但因年代久遠忘記了，她只記得她用了 2 種數字，則她設定密碼的可能情況共有_____種。（只出現 2 種數字，例如 1222、1122、……等）

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：630

解： $\underbrace{C_2^{10} \times \frac{4!}{2!2!}}_{AABB} + \underbrace{C_2^{10} \times 2! \times \frac{4!}{3!1!}}_{AAAB+BBBA} = 270 + 360 = 630$

11. $ABCD$ 為一坐標平面上的等腰梯形， $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，若 $A(1,1)$ 、 $B(1,6)$ 、 $C(7,9)$ ，求 D 點坐標為_____。

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(11,6)

解： $\overrightarrow{BC} = (6,3) \parallel (2,1)$ ， $D(1+2t, 1+t)$

$$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow 5 = \sqrt{(2t-6)^2 + (t-8)^2} \Rightarrow t=3 \text{ 或 } 5$$

$$t=3 \Rightarrow D=(7,4) \text{ (不合 } \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{)}; t=5 \Rightarrow D=(11,6)$$

12. 小義拿著一箱裝有 25 杯珍珠奶茶，15 杯多多綠茶（共 40 杯），準備請 38 位同學喝（全班有 39 位學生），小義請每位同學一人一杯輪流拿，且每一杯被同學拿到的情況是隨機的，最後剩下的 2 杯為小義的。已知每杯飲料被同學拿到的機會均等，則在小義有拿到珍珠奶茶的情況下，小義拿到 2 杯珍珠奶茶的機率為_____。（化為最簡分數）

【114 北北基分科模考數乙 5】

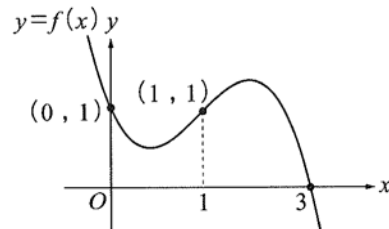
答： $\frac{4}{9}$

解： $\frac{\frac{38!}{23!15!}}{\frac{38!}{23!15!} + \frac{38!}{24!14!} \times 2!} = \frac{24 \cdot 1}{24 \cdot 1 + 15 \times 2} = \frac{4}{9}$

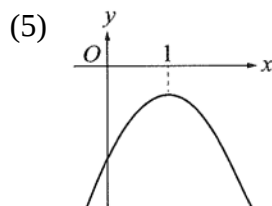
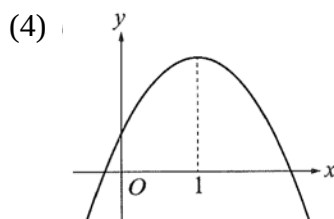
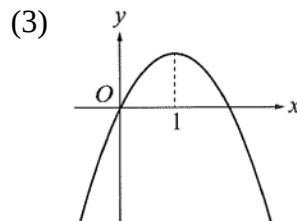
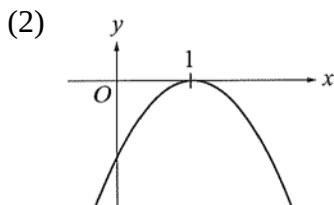
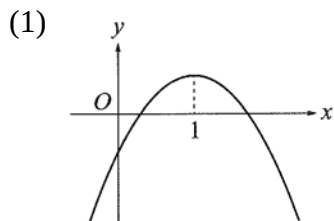
第貳部分：混合題或非選擇題

13-15 題為題組

如右示意圖，三次函數 $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形通過 $(0,1)$ 、 $(1,1)$ 、 $(3,0)$ 三點，且 $(1,1)$ 為其反曲點，試回答下列各題：



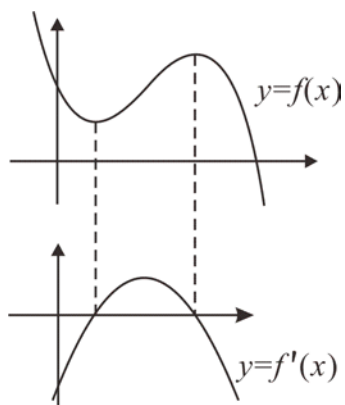
13. $y = f'(x)$ 的圖形與下列哪一個圖形最為接近？（單選題）



【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(1)

解：



14. 求出 a , b , c , d 的值。

【114 北北基分科模考數乙 5】

答： $a = -\frac{1}{6}$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{1}{3}$, $d = 1$

解： $f(x) = a(x-1)^3 + p(x-1) + 1$

$$f(0) = -a - p + 1 = 1 \Rightarrow a + p = 0$$

$$f(3) = 8a + 2p + 1 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{6}, p = \frac{1}{6}$$

$$f(x) = -\frac{1}{6}(x-1)^3 + \frac{1}{6}(x-1) + 1 = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

解： $f''(x) = 6a(x-1) = 6ax - 6a$

$$\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 - 6ax + p$$

$$\Rightarrow f(x) = ax^3 - 3ax^2 + px + q \begin{cases} f(0) = q = 1 \\ f(1) = a - 3a + p + q = 1 \\ f(3) = 27a - 27a + 3p + q = 0 \end{cases}$$

$$\therefore q = 1, p = -\frac{1}{3}, a = -\frac{1}{6}, f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1$$

15. 求 $y = f(x)$ 的圖形在第一象限內， $0 \leq x \leq 3$ 的範圍內，曲線下的面積為何？

【114 北北基分科模考數乙 5】

答： $\frac{21}{8}$

$$\begin{aligned} \text{解：} \int_0^3 \left(-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x + 1 \right) dx &= \left[-\frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + x + c \right]_0^3 \\ &= -\frac{27}{8} + \frac{9}{2} - \frac{3}{2} + 3 = \frac{21}{8} \end{aligned}$$

16-18 題為題組

小芯經營網拍事業，依照消費者消費滿意程度，消費者會在網路平臺購買之後給予消費評價，分成 1、2、3、4、5 顆星，系統會依消費者給予之評價，自動計算該賣家評價的平均值並四捨五入至小數點後第二位，且顯示在平臺上以供消費大眾參考。今小芯已經累積 100 個評價，系統顯示她的評價為 4.83 顆星。

16. 假設在小芯的努力下，接下來消費者的評價皆為 5 顆星。試問：小芯必須至少再連續累積幾個 5 星評價，才可以使她的評價在系統上顯示為 4.95 顆星？（單選題）

- (1) 210 個 (2) 240 個 (3) 270 個 (4) 300 個 (5) 330 個

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：(1)

解： $4.825 \leq \frac{n}{100} < 4.835 \xrightarrow{n \in N} n = 483$

$$\frac{483 + 5x}{100 + x} \geq 4.945 \Rightarrow 0.055x \geq 11.5 \xrightarrow{x \in N} x \geq 210$$

17. 小芯觀察最近交易的 8 筆商品，價格(x)與評價(y)之間的關係如下：

價格(x)	100 元	200 元	300 元	200 元	100 元	200 元	200 元	300 元
評價(y)	5 顆星	4 顆星	5 顆星	5 顆星	4 顆星	5 顆星	3 顆星	5 顆星

若她想知道這 8 筆數據之間，價格與評價是否存在什麼相關性，請幫她求出價格(x)與評價(y)的相關係數 r 。

【114 北北基分科模考數乙 5】

答：0.25

解： $\bar{X} = \frac{1}{8}(100 + 200 + 300 + 200 + 100 + 200 + 200 + 300) = 200$

$$\bar{Y} = \frac{1}{8}(5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 5 + 3 + 5) = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

x_i	y_i	$(x_i - \bar{X})$	$(y_i - \bar{Y})$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(y_i - \bar{Y})^2$	$(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y})$
100	5	-100	0.5	10000	0.25	-50
200	4	0	-0.5	0	0.25	0
300	5	100	0.5	10000	0.25	50
200	5	0	0.5	0	0.25	0
100	4	-100	-0.5	10000	0.25	50
200	5	0	0.5	0	0.25	0
200	3	0	-1.5	0	2.25	0
300	5	100	0.5	10000	0.25	50
				$\sum = 40000$	$\sum = 4$	$\sum = 100$

$$r = \frac{100}{\sqrt{40000} \times \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

解： $\bar{X} = \frac{1}{8}(100 + 200 + 300 + 200 + 100 + 200 + 200 + 300) = 200$

$$\bar{Y} = \frac{1}{8}(5 + 4 + 5 + 5 + 4 + 5 + 3 + 5) = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}$$

$$E(x_i - \bar{X})^2 = (-100)^2 + 0 + 100^2 + 0 + (-100)^2 + 0 + 0 + 100^2 = 40000$$

$$E(y_i - \bar{Y})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 4$$

$$E(x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}) = (-50) + 0 + 50 + 0 + 50 + 0 + 0 + 50 = 100$$

$$r = \frac{100}{\sqrt{40000} \times \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

18. 承 17. 題，求出評價 (y) 對價格 (x) 的最適 (迴歸) 直線方程式，並以 $y = ax + b$ 的形式表示。

【114 北北基分科模考數乙 5】

答： $y = \frac{1}{400}x + 4$

解： $m = \frac{100}{40000} = \frac{1}{400}$ ， $L : \left(y - \frac{9}{2}\right) = \frac{1}{400}(x - 200) \Rightarrow y = \frac{1}{400}x + 4$