台北區高中 106 年(105 學年度)高三下
第一次指考模擬考數學(社會組)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. 若a爲擲一顆公正骰子一次所出現的點數，則方程組$\begin{cases} ax-3y=5-a \\ x+(a-4)y=3+a \end{cases}$有解的機率爲下列哪一個選項？

(1)$\frac{1}{6}$　(2)$\frac{1}{3}$　(3)$\frac{1}{2}$　(4)$\frac{2}{3}$　(5)$\frac{5}{6}$。　【106 北區聯合指考模擬考數乙】

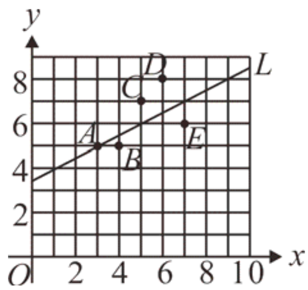
答：(5)

解：當$\frac{a}{1}\neq\frac{-3}{a-4}\Rightarrow a^2-4a+3\neq 0\Rightarrow a\neq 1,3$時，原式恰一組解

當$\frac{a}{1}=\frac{-3}{a-4}=\frac{5-a}{3+a}\Rightarrow a=1$時，原式無限多解

故當$a=1,2,4,5,6$時，原式有解，其機率爲時，原式無限多解

2. 小華在課堂操作電腦軟體繪製散佈圖，一時粗心，多輸入一個資料點，從原來的四個資料點增加成五個資料點A、B、C、D、E（如圖）。若原來的四個資料點以最小平方法所得y對x的迴歸直線（最適合直線）爲$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$，即右圖中直線$L$，則增加的資料點爲下列哪一個點？



(1)A　(2)B　(3)C　(4)D　(5)E。　【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(3)

解：刪除A後的算術平均$(5.5,6.5)\notin L$

刪除B後的算術平均$(5.25,6.5)\notin L$

刪除C後的算術平均$(5,6)\in L$

刪除D後的算術平均$(4.75,5.75)\notin L$

刪除E後的算術平均$(4.5,6.25)\notin L$

3. 西元某年的七月初正當要舉行約里奧運時，舉辦國爆發會令孕婦生出畸形兒的卡兹疫情。自爆發開始，患者人數以每個月增加10%擴張感染。世界衛生組織驚覺事態嚴重，緊急研發新藥，並於十月出開始投入新藥治療病患。若此時疫情已經停止擴張，且世界衛生組織期望新藥能讓患者人數以每個月減少$r\%$，達成『治療半年後，患者人數降至七月初大流行時的一半以下』的目標，則滿足上述條件r值的最小整數爲下列哪一個選項？（已知$\log1.1=0.0414$，$\log2=0.3010$，$\log8.494=0.9291$）

(1)9　(2)11　(3)12　(4)16　(5)18。　【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(4)

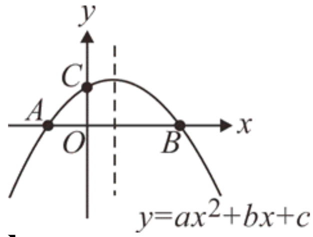
解：$(1+10\%)^3(1-r\%)^6<\frac{1}{2}\Rightarrow 3\log1.1+6\log(1-r\%)<-\log2$

$\Rightarrow\log(1-r\%)<-0.07086\cdots\approx-1+0.92913\cdots\approx\log10^{-1}+\log8.494\approx\log0.8494$

$\Rightarrow 1-r\%\approx 84.94\%\Rightarrow r\approx 15.06$

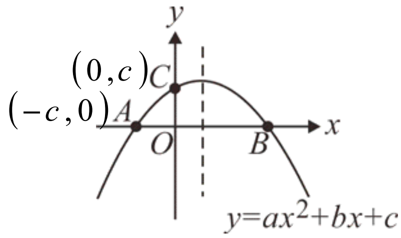
二、多選題

4. 如右圖，若函數 $y=ax^2+bx+c$（a、b、c 爲實數且 $a\neq 0$）的圖形與 x 軸交於 A、B 兩點，與 y 軸交於 C 點，且 $\overline{OA}=\overline{OC}$，則下列哪些選項正確？
(1) $abc<0$　(2) $a+b+c>0$　(3) $ac-b+1=0$
(4) $\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$　(5) $\overline{OA}\times\overline{OB}=-\dfrac{c}{a}$。【106 北區聯合指考模擬考數乙】



答：(1)(3)(5)

解：(1)(4) 由圖形得知：$a<0$、$b>0$、$c>0$、$b^2-4ac>0$
(2) $a+b+c=f(1)$，無法確定正負
(3) $\overline{OA}=\overline{OC}$，且 $C(0,c)$，故 $A(-c,0)$
則 $0=ac^2-bc+c\xrightarrow{\div c}ac-b+1=0$
(5) $\overline{OA}\times\overline{OB}=-(\text{兩根之積})=-\dfrac{c}{a}$



5. 已知 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 爲實係數多項式。若
$f(x)=\dfrac{6(x-2)(x-4)}{(3-2)(3-4)}+\dfrac{106(x-2)(x-3)}{(4-2)(4-3)}$，
$g(x)=47(x-4)(x-3)+100(x-4)+106$，且 $h(2)=0$，$h(3)=6$，$h(4)=106$，
則下列哪些選項正確？
(1) $f(2)=g(2)=0$　(2) $f(x)=g(x)$　(3) $h(1)=g(1)$　(4) $h(5)>0$
(5) $h(x)-f(x)$ 可被 $(x-2)(x-3)(x-4)$ 整除。【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(1)(2)(5)

解：(1)(2) $\deg f(x)=\deg g(x)=2$，
且 $f(2)=g(2)=0$、$f(3)=g(3)=6$、$f(4)=g(4)=106$
故 $f(x)=g(x)=(x-2)(47x-135)$
(3)(4) $h(x)=(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)+(x-2)(47x-135)$，故無法確定
(5) $h(x)-f(x)=(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)$，可被 $(x-2)(x-3)(x-4)$ 整除

6. 已知 a 爲正實數且 a 值不爲 1，則下列哪些選項正確？
(1) 若 $x>a$，則 $\log_a x>1$　(2) 若 $x>a$，則 $a^x>a^a$
(3) 若 $\log_a x>1$，則 $x>a>1$ 或 $0<x<a<1$　(4) 若 $a^x>a^a$，則 $x>a>1$ 或 $x<a<1$
(5) 若 $\log_a x=\log_x a$，則 $x=a$。【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(3)(4)

解：(1) 當 $a>1$ 時，若 $x>a$，則 $\log_a x>\log_a a=1$
當 $0<a<1$ 時，若 $x>a$，則 $\log_a x<\log_a a=1$
(2) 當 $a>1$ 時，若 $x>a$，則 $a^x>a^a$
當 $0<a<1$ 時，若 $x>a$，則 $a^x<a^a$
(3) $\log_a x>\log_a a=1$，若 $a>1$ 時，則 $x>a$，故 $x>a>1$
若 $0<a<1$ 時，則 $0<x<a$，故 $0<x<a<1$
(4) $a^x>a^a$，若 $a>1$ 時，則 $x>a$，故 $x>a>1$

若 $0<a<1$ 時，則 $x<a$，故 $x<a<1$

(5) $\log_a x=\log_x a\Rightarrow(\log x)^2=(\log a)^2\Rightarrow\log x=\pm\log a$，則 $x=a$ 或 $x=\dfrac{1}{a}$

7. 在平面坐標上，已知 $\overrightarrow{u}=(-2,1)$，$\overrightarrow{v}=(1,2)+k(5,3)$，其中 $-2\le k\le 3$，
則下列哪些選項正確？
(1)找得到 k 值，滿足 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$ (2)找得到 k 值，滿足內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-5$
(3)找得到 k 值，滿足內積 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=5\sqrt{34}$
(4)找得到 k 值，滿足 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 所圍成的平行四邊形面積爲 $5\sqrt{34}$
(5)找得到兩個 k 值，滿足 $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 所圍成的平行四邊形面積爲 10。
【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(1)(2)(4)(5)

解：$\overrightarrow{v}=(1,2)+k(5,3)=(5k+1,3k+2)$

(1) $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}\Rightarrow\dfrac{5k+1}{-2}=\dfrac{3k+2}{1}\Rightarrow 11k=-5\Rightarrow k=\dfrac{-5}{11}$，滿足 $-2\le k\le 3$

(2) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=-5\Rightarrow-10k-2+3k+2=-5\Rightarrow k=\dfrac{5}{7}$，滿足 $-2\le k\le 3$

(3) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=5\sqrt{34}\Rightarrow-10k-2+3k+2=5\sqrt{34}\Rightarrow k=\dfrac{-5\sqrt{34}}{7}$，不滿足 $-2\le k\le 3$

(4) $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 所圍成的平行四邊形面積 $\left\|\begin{matrix}5k+1 & 3k+2\\ -2 & 1\end{matrix}\right\|=|11k+5|=5\sqrt{34}$

$\Rightarrow k=\dfrac{5\sqrt{34}-5}{11}\approx 2.\cdots$（滿足 $-2\le k\le 3$）

或 $k=\dfrac{-5\sqrt{34}-5}{11}\approx-3.\cdots$（不滿足 $-2\le k\le 3$）

(5) $\overrightarrow{u}$、$\overrightarrow{v}$ 所圍成的平行四邊形面積 $\left\|\begin{matrix}5k+1 & 3k+2\\ -2 & 1\end{matrix}\right\|=|11k+5|=10$

$\Rightarrow k=\dfrac{5}{11}$ 或 $\dfrac{-15}{11}$（均滿足 $-2\le k\le 3$）

8. 在平面坐標上，x 坐標與 y 坐標皆爲整數的點稱作格子點。
已知 $A(32,1)$、$B(-108,106)$，若點 P 爲線段 $\overline{AB}$ 上一點，則下列哪些選項正確？
(1)線段 $\overline{AB}$ 的方程式可以表示爲 $\begin{cases}x=-108-140t\\ y=106+105t\end{cases}$，$0\le t\le 1$
(2)直線 AB 的方程式爲 $3x+4y=100$
(3)若直線 AB 與 x 軸的鈍夾角爲 θ，則 $\tan\theta=-\dfrac{4}{5}$
(4)線段 $\overline{AB}$ 上共有 36 個格子點
(5)點 P 到原點的最短距離爲 20 個單位。
【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(2)(4)(5)

解：(1)應爲 $\begin{cases}x=-108+140t\\ y=106-105t\end{cases}$，$0\le t\le 1$

(2) $\overleftrightarrow{AB}$ 方向向量 $(140,-105)//(4,-3)$，斜率 $\dfrac{-3}{4} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB}$ 爲 $3x+4y=100$

(3) $\overleftrightarrow{AB}$ 與 x 軸的鈍夾角爲 θ，則 $\tan\theta=-\dfrac{3}{4}$

(4)方向向量 $(140,-105)=35(4,-3)$，故 $\overline{AB}$ 上共有 36 個格子點

(5)點 P 到原點的最短距離爲 $d\left(O,\overleftrightarrow{AB}\right)=\dfrac{|0+0-100|}{5}=20$ 個單位

三、選填題

A. 某次數學段考，小華考了全校最高分 72 分，但是小華就讀年級的年級段考平均分數爲 39.9 分、標準差爲 13.6 分。於是，數學老師們決定調整分數，並依照下列規則進行：
(1)新成績 $=a\times$(原成績)$+b$，其中 a 、b 爲實數；
(2)爲了不影響段考排名，調整分數前後任兩位同學之間的分數差距維持不變；
(3)原成績中最高分調整爲 100 分。
若調整分數後，新成績的平均爲 m 分，標準差爲 n 分，則數對 $(m,n)=$＿＿＿＿。
【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：$(67.9,13.6)$

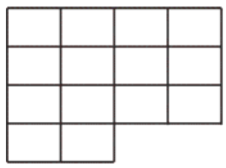
解：由條件(2)得知 $a=1$，由條件(3)得知 $b=28$。
故新平均分數爲 $39.9\times1+28=67.9$ 分、新標準差爲 $13.6\times1=13.6$ 分。

B. 已知 8 張獎券中有一等獎、二等獎和三等獎各 1 張，其餘相同的 5 張爲「銘謝惠顧」。現將這 8 張獎券分給甲、乙、丙、丁四人，每人 2 張獎券，則得獎的情形共有＿＿＿＿種。
【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：60

解：$\underbrace{C^4_1C^3_2}_{\text{選一人得三種獎之二}}\times\underbrace{C^3_1C^1_1}_{\text{餘人選一人得最後一獎}}+\underbrace{C^4_1}_{\text{選一人得一等獎}}\times\underbrace{C^3_1}_{\text{餘人選一人得二等獎}}\times\underbrace{C^2_1}_{\text{餘人選一人得三等獎}}=36+24=60$

C. 如右圖，一個有 14 個空格的表格，若隨機在 14 個空格中分別填入數字 1、2、……、14 且不得重複，則 1 和 2 這兩個數字在同一行或同一列的機率爲＿＿＿＿。
（化爲最簡分數）
【106 北區聯合指考模擬考數乙】



答：$\dfrac{37}{91}$

解：$\dfrac{\left(\underbrace{C^4_2\times2!\times2}_{\text{直四同行}}+\underbrace{C^3_2\times2!\times2}_{\text{直三同行}}+\underbrace{C^4_2\times2!\times3}_{\text{橫四同列}}+\underbrace{C^2_2\times2!}_{\text{橫二同列}}\right)\times12!}{14!}=\dfrac{37}{91}$

第貳部分：非選擇題

1. 糸守高中全校學生均留校自習，有閱覽室及溫書室兩處地方供學生選擇，學生每個星期都能選擇繼續留在原處自習或轉往另一處自習。根據統計，學生每個星期選擇留在原處自習的機率是轉往另一處機率的一半。若學期開始的第一週宮水三葉選擇在溫書室自習，請回答下列問題：
(1)寫出糸守高中學生選擇自習地點的轉移矩陣 A。

(2)承(1)，寫出轉移矩陣A的反方陣A^{-1}。

(3)已知第五週宮水三葉在溫書室自習的機率爲$\dfrac{41}{81}$，則第四週宮水三葉在溫書室自習的機率爲何？

(4)長期下來，全校學生選擇在溫書室自習的比例會趨近多少？

【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(1) $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ (2) $A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ (3) $\dfrac{13}{27}$ (4) $\dfrac{1}{2}$

解：(1) $\begin{array}{c|cc} & \text{閱覽室} & \text{溫書室}\\ \hline \text{閱覽室} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \text{溫書室} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{array}$ (2) $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{-2}{3}\\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\times\dfrac{1}{-\frac{1}{3}}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{40}{81}\\ \frac{41}{81}\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{40}{81}\\ \frac{41}{81}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{14}{27}\\ \frac{13}{27}\end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\ x+y=1\end{cases}\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$

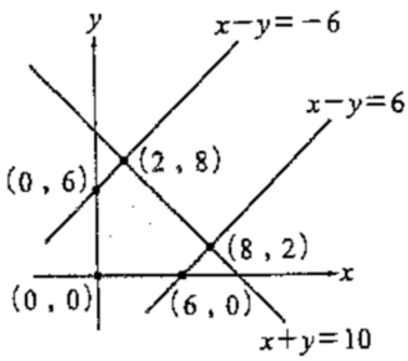
2. 數線上有三點$A(x)$、$B(y)$、$C(5)$，其中$x\geq 0$、$y\geq 0$，若A與B的距離不大於6，且A與B的中點M不在C點的右側：

(1)列出所有x、y的條件，並以聯立不等式表示。

(2)設O爲數線上的原點，求出$2\overline{OA}-3\overline{OB}$的最大值與最小值。

【106 北區聯合指考模擬考數乙】

答：(1) $\begin{cases}-6\leq x-y\leq 6\\ x+y\leq 10\\ x\geq 0，y\geq 0\end{cases}$ (2)最大值12，最小值-20



解：A與B的距離不大於6：$|x-y|\leq 6$

A與B的中點M不在C點的右側：$\dfrac{x+y}{2}\leq 5$

綜合上述：$\begin{cases}-6\leq x-y\leq 6\\ x+y\leq 10\\ x\geq 0，y\geq 0\end{cases}$

目標函數$2\overline{OA}-3\overline{OB}=2x-3y$

(x,y)	$(0,0)$	$(6,0)$	$(8,2)$	$(2,8)$	$(0,6)$
$2x-3y$	0	12	10	-20	-18