臺中市立高級中等學校 106 學年度指定科目第三次聯合模擬考試

數學乙考科解析

考試日期：107 年 3 月 5~6 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12		
1	4	2	124	5	15	23	3	3	4	5	4		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\because f(x)=(a-b+3c)x^2+(a+b+2c+1)x+(a-2bc)=2x^2$ 有三個實數解

$\therefore$上式爲恆等式 $\Rightarrow \begin{cases} a-b+3c=2 \cdots\cdots ① \\ a+b+2c+1=0 \cdots\cdots ② \\ a-2bc=0 \cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

③代入② $\Rightarrow (b+1)(2c+1)=0$ $\quad b=-1$ 或 $c=-\frac{1}{2}$ (不合)

$\therefore$ ③ $\Rightarrow a=-2c$ 代入①得 $c=1$ $\quad \therefore a=-2$

$abc=2$，故選(1)

2. (1) 全部答對的機率 $=(\frac{1}{2})^{10}=\frac{1}{1024}<0.001$

(2) 至少答對一題的機率 $=1-$ 全部答錯的機率 $=1-(\frac{1}{2})^{10}>1-0.001=0.999$

(3) 至少答對一半的機率 $=\frac{C_5^{10}+C_6^{10}+C_7^{10}+C_8^{10}+C_9^{10}+C_{10}^{10}}{2^{10}}=\frac{638}{1024}\fallingdotseq 0.623$

(4) 分數的期望值爲 $10\times E$ (答對題數) $=10\times(10\times\frac{1}{2})=50$ 分

(5) 答對題數的標準差 $=\sqrt{10\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

3. $\because a>b>c>1$ $\quad \therefore \log a>\log b>\log c>0$

a , b , c 三數成等比 $\quad \therefore b^2=ac \Rightarrow 2\log b=\log a+\log c$

$\log_a b=\frac{\log b}{\log a}<1 , \log_b c=\frac{\log c}{\log b}<1 , \log_c a=\frac{\log a}{\log c}>1$

$\log_a b-\log_b c=\frac{\log b}{\log a}-\frac{\log c}{\log b}=\frac{(\log b)^2-(\log a)(\log c)}{(\log a)(\log b)}$

$=\frac{(\frac{\log a+\log c}{2})^2-(\log a)(\log c)}{(\log a)(\log b)}=\frac{(\log a-\log c)^2}{4(\log a)(\log b)}>0$

$\therefore \frac{\log a}{\log c}>1>\frac{\log b}{\log a}>\frac{\log c}{\log b} \Rightarrow \log_c a>\log_a b>\log_b c$

二、多選題

4. $x^4-8x^3+ax^2+bx+c=(x+1)(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$

$-1+\alpha+\beta+\gamma=8$ 且 $2\beta=\alpha+\gamma \Rightarrow -1+3\beta=8 \Rightarrow \beta=3$

公差 $=\frac{\beta-(-1)}{2}=2 \Rightarrow \alpha=-1+2=1$ 且 $\gamma=\beta+2=5$

$(x+1)(x-1)(x-3)(x-5)=x^4-8x^3+14x^2+8x-15$

$a=14 , b=8 , c=-15$

5. 公差 1 可挑 $(1,2,3,\cdots,10)$、$(2,3,4,\cdots,11)$、…、$(91,92,93,\cdots,100)$ 計 91 種挑法

公差 2 可挑 $(1,3,5,\cdots,19)$、$(2,4,6,\cdots,20)$、…、$(82,84,86,\cdots,100)$ 計 82 種挑法

…

公差 5 可挑 $(1,6,11,\cdots,46)$、$(2,7,12,\cdots,47)$、…、$(55,60,65,\cdots,100)$ 計 55 種挑法

…

公差 11 可挑 $(1,12,23,\cdots,100)$ 計 1 種挑法

(1) 公差爲 5 的有 55 個

(2) 和最大 $91+92+93+\cdots+100=955$

(3) 公差最大的數列，其公差爲 11

(4) 含有 1 的數列有 11 個

(5) $x=91+82+73+\cdots+1=506$

故選(5)

6. (1) 40＞十個 x 值的平均數 39 $\Rightarrow$ 十一個 x 值的平均數會變大

(2) 17＜十個 y 值的平均數 18 $\Rightarrow$ 十一個 y 值的平均數會變小

(3) 加入的 x 值爲 40，因爲 $(40-39)^2$ 遠小於 17.87，所以十一個 x 值的標準差會變小

(4) 加入的 y 值爲 17，因爲 $(17-18)^2$ 遠小於 8.93，所以十一個 y 值的標準差會變小

(5) 10 筆的 x , y 的 x 值與 y 值的 2 倍和均爲 75

$\Rightarrow$ 10 筆的 x , y 的相關係數爲 -1

加入的 $(x , y)=(40 , 17)$，因爲 $40+17\times 2=74$

$\Rightarrow$ 11 筆的 x , y 的相關係數會大於 -1

故選(1)(5)

7. $f(\alpha)>f(\beta) \Rightarrow |\log_2\alpha|>|\log_2\beta| \Rightarrow (\log_2\alpha)^2>(\log_2\beta)^2$

$\Rightarrow (\log_2\alpha+\log_2\beta)(\log_2\alpha-\log_2\beta)>0$

$\Rightarrow (\log_2\alpha\beta)(\log_2\frac{\alpha}{\beta})>0$

$\because 0<\alpha<\beta$

$\therefore 0<\frac{\alpha}{\beta}<1 \Rightarrow \log_2\frac{\alpha}{\beta}<0 \Rightarrow \log_2\alpha\beta<0$

$\Rightarrow 0<\alpha\beta<1$ $\quad \therefore \alpha$ 必小於 1

三、選填題

A. ＜法一＞

列舉法或畫樹狀圖解之。

＜法二＞

擲一次骰子，甲可能得 6、-4、-2 元

設擲了 4 次，甲得 6、-4、-2 元分別爲 x、y、$4-x-y$ 次

甲最後身上有大於 100 元

$\Rightarrow 6x-4y-2(4-x-y)>0$ 且 $x+y\leq 4$

$\Rightarrow 4x-y-4>0$ 且 $x+y\leq 4$

$\Rightarrow (x , y , 4-x-y)=(2 , 0 , 2)$、$(2 , 1 , 1)$、$(2 , 2 , 0)$、$(3 , 0 , 1)$、$(3 , 1 , 0)$、$(4 , 0 , 0)$

所求 $=\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!2!}+\frac{4!}{3!}+\frac{4!}{3!}+1=33$

B. 由題意知 $\overrightarrow{b} \parallel \overrightarrow{c} \Rightarrow$ 設 $\overrightarrow{b}=t\overrightarrow{c}$ 且 $t<-1$

$-120=\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}=t\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{c}=t|\overrightarrow{c}|^2 \cdots\cdots ①$

$(-10,20)=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}=t\overrightarrow{c}-\overrightarrow{c}=(t-1)\overrightarrow{c}$

$\Rightarrow 100+400=(t-1)^2|\overrightarrow{c}|^2 \cdots\cdots ②$

解①②得 $t=-\frac{3}{2}$、$-\frac{2}{3}$ (不合) $\Rightarrow |\overrightarrow{c}|=4\sqrt{5}$

C. 將聯立不等式繪圖如右，爲△ABC 內部及邊界區域

設 $ax-y+7=k$

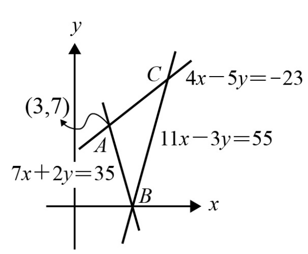
$\Rightarrow$ 斜率 $=a\geq 1$ ($\because a\in N$)

$4x-5y=-23$ $\quad$ 斜率 $=\frac{4}{5}<1$

$\Rightarrow$ 點 $A(3 , 7)$ 代入得最小值

$\Rightarrow 3a-7+7=12$

$\Rightarrow a=4$



第貳部分：非選擇題

一、(1) $(x, y) = (0.6, 0.65)$ (2) $\begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$ (3) $\frac{1}{3}$

【詳解】

(1) AB 爲轉移矩陣 $\Rightarrow (x, y) = (0.6, 0.65)$ (3 分)

(2) $A^{-1} = \frac{1}{0.56-0.06}\begin{bmatrix} 0.8 & -0.2 \\ -0.3 & 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.4 \end{bmatrix}$ (3 分)

$AB = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.65 \\ 0.6 & 0.35 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow B = A^{-1}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.65 \\ 0.6 & 0.35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & -0.4 \\ -0.6 & 1.4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & 0.65 \\ 0.6 & 0.35 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0.4 & 0.9 \\ 0.6 & 0.1 \end{bmatrix}$ (3 分)

(2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+z=1$ (3 分) $\Rightarrow z=\frac{1}{3}$ (1 分)

二、(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{4}$ (3) $\frac{17}{4}$

【詳解】

(1) $P(X=6)=\frac{1}{6}+\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$ (3 分)

(2)

X	1	2	3	4	5	6
$P(X)$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

$P(X>3)=P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{3}{4}$ (5 分)

(3) $E(X)=1\cdot\frac{1}{12}+2\cdot\frac{1}{12}+3\cdot\frac{1}{12}+4\cdot\frac{1}{4}+5\cdot\frac{1}{4}+6\cdot\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$ (5 分)