數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.				
答案	(2)	(5)	(1)(4)(5)	(2)(4)(5)	(3)(4)(5)				

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (2)

難易度：中

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：重複組合

解析：將 2 盆菊花置於玫瑰與水仙之間，再將其餘 3 盆菊花任意排入由玫瑰與水仙間隔出的三個區域
設三個區域分別為 x、y、z，則三個區域加起來共有 3 盆菊花
即 $x+y+z=3$ 的非負整數解再乘以玫瑰與水仙的排列數為 $C_3^5 \times 2!=20$ (種)
故選(2)。

2. (5)

難易度：易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：貝氏定理的運用

解析：$\dfrac{\frac{2}{10}\times 1}{\frac{7}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{10}\times 1+\frac{1}{10}\times 0}=\dfrac{4}{7+4+0}=\dfrac{4}{11}$

故選(5)。

二、多選題

3. (1)(4)(5)

難易度：中偏易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：數據伸縮平移後對平均數及標準差的影響、迴歸直線及相關係數的基本觀念

解析：(1) ○：Y 的平均為 $2\times 20+10=50$

(2) ╳：Y 的全距為 $2\times 20=40$

(3) ╳：Y 的標準差為 $2\times 20=40$

(4) ○：Y 對 X 的迴歸直線即為 $Y=2X+10$，點 $(20, 50)$ 顯然在其上

(5) ○：$Y=2X+10=\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}X+10\right)-\frac{10}{3}=\frac{4}{3}Z-\frac{10}{3}$，故 Y 和 Z 的相關係數為 1

故選(1)(4)(5)。

4. (2)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣乘法和反矩陣計算能力

解析：(1) ╳：$\begin{cases} x=1+2\times 2=5 \\ y=2\times 1+3\times 2=8 \end{cases}$，則密碼數對為 $(5, 8)$

(2) ○：$\begin{cases} 1=a+2b \\ 2=2a+3b \end{cases}$，消去法解出明碼數對 (a, b) 為 $(1, 0)$

(3) ╳：$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(4) ○：$A^2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=AA\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 21 \\ 34 \end{bmatrix}$

(5) ○：$B=A^{-1}=\dfrac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

故選(2)(4)(5)。

5. (3)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第一章〈數與式〉

目標：數線上的幾何

解析：$|x-a|\le 4\Rightarrow -4+a\le x\le a+4$

若 a 為整數，滿足不等式的整數解有 9 個

若 a 不為整數，滿足不等式的整數解有 8 個

故選(3)(4)(5)。

三、選填題

A. $(2\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5})$

難易度：中偏易

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：直線的參數式、向量內積

解析：〈法一〉

因為 P 為直線 $x-2y=0$ 上的一點

可設 $P(2t\,,t)$，其中 t 為實數

$\overrightarrow{AP}=(2t\,,t-5)$，$\overrightarrow{BP}=(2t\,,t+5)$

因為 $\angle APB=90^\circ$

$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0\Rightarrow 4t^2+t^2-25=0\Rightarrow t=\pm\sqrt{5}$

又點 P 在第一象限，故 $P(2\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5})$。

〈法二〉

設 $P(x\,,y)$，因 P 是直線上的一點，則 $x-2y=0$

$\angle APB=90^\circ\Rightarrow m_{\overline{AP}}\times m_{\overline{BP}}=-1$

$\therefore \dfrac{y-5}{x-0}\times\dfrac{y-(-5)}{x-0}=-1$

$\Rightarrow x^2+y^2=25$

$\begin{cases}x-2y=0\\x^2+y^2=25\end{cases}\Rightarrow (x\,,y)=(2\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5})$ 或 $(-2\sqrt{5}\ ,\ -\sqrt{5})$

$\because$點 P 在第一象限，故點 P 的坐標為 $(2\sqrt{5}\ ,\ \sqrt{5})$。

B. 4

難易度：中

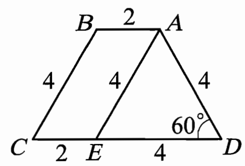
出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：向量內積

解析：〈法一〉

過 A 做直線平行 $\overline{BC}$ 交 $\overline{CD}$ 於 E 點

由邊長知$\triangle AED$ 為正三角形，故$\angle DAE=60^\circ$、$\angle BAD=120^\circ$



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}$

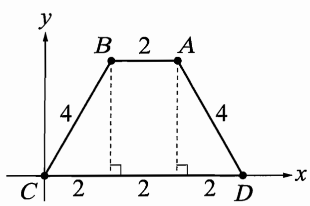
$=2\times4\times\cos 120^\circ+4\times4\times\cos 60^\circ$

$=4$。

〈法二〉

建立坐標系，以點 C 為 $(0\,,0)$

則 $B(2\,,2\sqrt{3})$，$A(4\,,2\sqrt{3})$，$D(6\,,0)$



$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=(-4\,,-2\sqrt{3})\cdot(2\,,-2\sqrt{3})$

$=(-8)+12=4$。

C. $\dfrac{3}{2}$

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的運算

解析：$\dfrac{\log_2 a}{\log_2 b}=\log_b a$

$\Rightarrow \log_b a=\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow a=b^{\frac{3}{2}}$

$\therefore t=\dfrac{3}{2}$。

D. 5

難易度：中偏易

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：條件機率的定義與基本運算

解析：設白球共有 n 顆

依題意列式可得 $\dfrac{C_2^{10}}{C_2^{10}+C_2^n}=\dfrac{9}{11}$

化簡得 $n^2-n-20=0$，可得 $n=5$

即白球共有 5 顆。

E. 37.9

難易度：易

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：對數的運算

解析：$10\times1.2^x \geq 10000$

$\Rightarrow 1.2^x \geq 1000$

$\Rightarrow \log 1.2^x \geq \log 1000$

$\Rightarrow x\log 1.2\geq 3$

$\Rightarrow x\geq \dfrac{3}{\log 1.2}=\dfrac{3}{-1+2\log 2+\log 3}\approx 37.9$ (小時)。

第貳部分：非選擇題

一、⑴ 4；⑵ $(-4,1,6)$；⑶ -1、2、3

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理、一次因式檢驗法

解析：由題意可設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)-4x+8$，其中 k 為實數

⑴ $x=1$ 代入得 $f(1)=-4+8=4$

$\therefore f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 4。

⑵ $x=0$ 代入得 $f(0)=-2k+8=6\Rightarrow k=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-1)-4x+8$

$=x^3-4x^2+x+6$

故序組 $(a,b,c)=(-4,1,6)$。

⑶〈法一〉

$f(x)$ 可能的一次因式有 $x+1$、$x+2$、$x+3$、$x+6$、$x-2$、$x-3$、$x-6$ (由題目及⑴可知 $x-1$ 不是)

又 $f(-1)=0$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$

$\therefore f(x)=0$ 的有理根為 -1、2、3。

〈法二〉

由⑵知

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-1)-4x+8$

$=(x-1)(x-2)(x-1)-4(x-2)$

$=(x-2)[(x-1)^2-4]$

$=(x-2)(x-1+2)(x-1-2)$

$=(x-2)(x+1)(x-3)$

$\therefore f(x)=0$ 的有理根為 -1、2、3。

二、每週製作豪華獨木舟 16 艘，經典獨木舟 12 艘，有最大利潤 44000 元

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：設每週豪華獨木舟製造 x 艘，經典獨木舟製造 y 艘

寫出符合題意的聯立不等式

①$\begin{cases} x\geq 0，y\geq 0，x、y\in Z \\ 9x+8y\leq 240 \\ 6x+2y\leq 120 \\ 1.6x+3.2y\leq 80 \end{cases}$

欲求獲利目標函數 $P(x,y)=2000x+1000y=1000(2x+y)$ 的最大值

②找直線 $9x+8y=240$ 上兩點

x	0	$\frac{80}{3}$
y	30	0

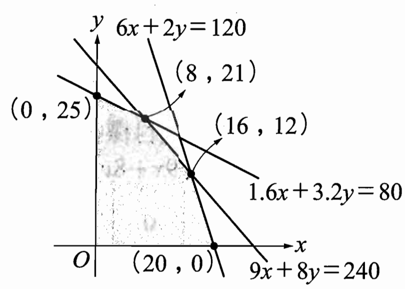
找直線 $6x+2y=120$ 上兩點

x	0	20
y	60	0

找直線 $1.6x+3.2y=80$ 上兩點

x	0	50
y	25	0

作出可行解區域如右：



③找出可行解區域的頂點

$\begin{cases} 9x+8y=240 \\ 6x+2y=120 \end{cases}\Rightarrow x=16，y=12$

$\begin{cases} 9x+8y=240 \\ 1.6x+3.2y=80 \end{cases}\Rightarrow x=8，y=21$

④利用頂點法，將可行解區域的頂點坐標代入目標函數

(x,y)	$(0,25)$	$(8,21)$	$(16,12)$	$(20,0)$
$2x+y$	25	37	44	40

故每週製作「豪華獨木舟」16 艘，「經典獨木舟」12 艘，有最大利潤 $44\times 1000=44000$ 元。

非選擇題批改原則

第貳部分：非選擇題

一、(1) 4；(2) $(-4,1,6)$；(3) -1、2、3

難易度：易

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：餘式定理、一次因式檢驗法

解析：由題意可設 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)-4x+8$，其中 k 為實數

(1) $x=1$ 代入得 $f(1)=-4+8=4$

$\therefore f(x)$ 除以 $(x-1)$ 的餘式為 4。　(3 分)

(2) $x=0$ 代入得 $f(0)=-2k+8=6\Rightarrow k=1$

$\therefore f(x)=(x-1)(x-2)(x-1)-4x+8$

$=x^3-4x^2+x+6$

故序組 $(a,b,c)=(-4,1,6)$。　(3 分)

(3)〈法一〉

$f(x)$ 可能的一次因式有 $x+1$、$x+2$、$x+3$、$x+6$、$x-2$、$x-3$、$x-6$ (由題目及(1)可知 $x-1$ 不是)

又 $f(-1)=0$

$\Rightarrow f(x)=(x+1)(x^2-5x+6)=(x+1)(x-2)(x-3)$

$\therefore f(x)=0$ 的有理根為 -1、2、3。　(6 分)

〈法二〉

由(2)知

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)(x-2)(x-1)-4x+8 \\ &= (x-1)(x-2)(x-1)-4(x-2) \\ &= (x-2)[(x-1)^2-4] \\ &= (x-2)(x-1+2)(x-1-2) \\ &= (x-2)(x+1)(x-3) \end{aligned}$$

$\therefore f(x)=0$ 的有理根為 -1、2、3。 (6 分)

二、每週製作豪華獨木舟 16 艘，經典獨木舟 12 艘，有最大利潤 44000 元

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：設每週豪華獨木舟製造 x 艘，經典獨木舟製造 y 艘 (1 分)

寫出符合題意的聯立不等式

① $\begin{cases} x \ge 0，y \ge 0，x、y \in Z \\ 9x+8y \le 240 \\ 6x+2y \le 120 \\ 1.6x+3.2y \le 80 \end{cases}$ (3 分)

欲求獲利目標函數 $P(x,y)=2000x+1000y=1000(2x+y)$ 的最大值

②找直線 $9x+8y=240$ 上兩點

x	0	$\frac{80}{3}$
y	30	0

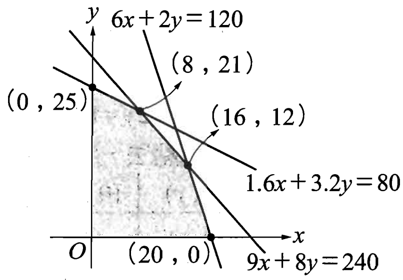
找直線 $6x+2y=120$ 上兩點

x	0	20
y	60	0

找直線 $1.6x+3.2y=80$ 上兩點

x	0	50
y	25	0

作出可行解區域如右：



③找出可行解區域的頂點

$\begin{cases} 9x+8y=240 \\ 6x+2y=120 \end{cases} \Rightarrow x=16，y=12$

$\begin{cases} 9x+8y=240 \\ 1.6x+3.2y=80 \end{cases} \Rightarrow x=8，y=21$ (4 分)

④利用頂點法，將可行解區域的頂點坐標代入目標函數

(x,y)	$(0,25)$	$(8,21)$	$(16,12)$	$(20,0)$
$2x+y$	25	37	44	40

故每週製作「豪華獨木舟」16 艘，「經典獨木舟」12 艘，有最大利潤 $44 \times 1000=44000$ 元。 (4 分)