

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(4)	(4)	(2)(4)(5)	(3)(4)(5)	(1)(4)	(1)(3)(4)	(1)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (4)

出處：第二冊第三章〈機率〉、選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：基礎機率的運算

解析： $\frac{C_1^4 C_1^4}{C_2^5 C_2^5} = \frac{4}{25}$

故選(4)。

2. (4)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣運算與運用

解析：令 $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, 則 $P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

故 $A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1}$, $A^{11} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{11} P^{-1}$

則 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}^{11} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1} A^{11} P = P^{-1} P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{11} P^{-1} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^{11} \end{bmatrix}$

故 $a = 2^{11} = 2048$

故選(4)。

二、多選題

3. (2)(4)(5)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：二次函數的圖形觀察及極值

解析：二次函數 $f(x) = 3x^2 - 3x + a(1 - x^2) = (3 - a)x^2 - 3x + a$

(1) \times ：判別式 $D = (-3)^2 - 4 \cdot (3 - a) \cdot a = 4a^2 - 12a + 9 = (2a - 3)^2 \geq 0$, 所以 $f(x)$ 的圖形與 x 軸必相交

(2) \circ ：若 $f(x)$ 有最小值, 則拋物線開口向上, 故 $3 - a > 0 \Rightarrow a < 3$

(3) \times ：當 $a > 3$ 時, $f(x)$ 的圖形與 x 軸交於兩點但開口向下

(4) \circ ：判別式 $D = (2a - 3)^2 = 0$ 時, $f(x)$ 的圖形與 x 軸只有一個交點, 故 $a = \frac{3}{2}$

(5) \circ ：當 $a = \frac{3}{2}$ 時, $f(x) = \frac{3}{2}(x - 1)^2$, 最小值為 0

故選(2)(4)(5)。

4. (3)(4)(5)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：抽樣調查解讀及其意涵

解析：(1) \times ：45% 僅為此次抽樣結果, 並無法表示全體市民的支持度

(2) \times ：真正的支持度 p 為一確定的數, 支持度 p 在 0.42 至 0.48 之間的機率不是 1 便是 0

(3) \circ

(4) \circ ： $3.0\% \times \frac{3}{2} = 4.5\%$

(5) \circ ： $2\sqrt{\frac{0.45 \times 0.55}{n}} = 0.03$, $n = 1100$

故選(3)(4)(5)。

5. (1)(4)

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：由線性規劃判斷目標函數的最大值最小值

解析：(1) ○：因為發生最大值的點不為可行解區域的頂點，所以 P 點一定在可行解區域的邊界上，且 $0 < k < 5$ ，

故由右圖可知 P 點一定在 \overline{CD} 上。所以 $m_{\overline{CD}} = m_{\overline{CP}} = -\frac{5}{2}$ ，則 $\frac{k-9}{2} = -\frac{5}{2}$ ，故 $k=4$

(2) ×：目標函數必與 \overline{CD} 平行，故斜率 $-\frac{a}{b}$ 為 $-\frac{5}{2}$ ，所以 $ab > 0$

(3) ×：如右圖，因為斜率為 $-\frac{5}{2}$ ，由平行線法判斷可知最小值發生在 B 點

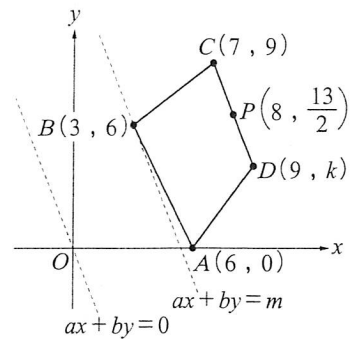
(4) ○：由 $8a + \frac{13}{2}b = 53$ 且 $a = \frac{5}{2}b$ 可得目標函數為 $5x + 2y$ ，

將 B 點代入可得最小值為 27

(5) ×：直線 AB 方程式為 $2x + y = 12$ ，故 $x^2 + y^2$ 的最小值為原點到

直線 AB 距離的平方，即為 $\left(\frac{12}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{144}{5}$

故選(1)(4)。



6. (1)(3)(4)

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：了解期望值的概念

解析：(1) ○：三人獲得總獎金為 $10 + 20 + 30 = 60$ 元的機率為 $\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{120}$

(2) ×：三人獲得總獎金為 $10 + 20 = 30$ 元的機率為：

$P(\text{甲中乙中丙不中} + \text{甲中乙不中丙中} + \text{甲不中乙中丙中})$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{7}{40}$$

(3) ○：甲獲得獎金的期望值為 $10 \times \frac{3}{10} = 3$ (元)

(4) ○：丙獲得獎金的期望值為 $10 \times \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} + 20 \times \frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{2}{8} \times 2 + 30 \times \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{13}{3}$ (元)

(5) ×：三人可得總獎金的期望值為

$$10 \times \left(\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} \times \frac{6}{8} \times 3\right) + 30 \times \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{7}{8} \times 3\right) + 60 \times \left(\frac{3}{10} \times \frac{2}{9} \times \frac{1}{8}\right) = 11 \text{ (元)}$$

故選(1)(3)(4)。

7. (1)(4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：母體數據分析

解析：(1) ○：9 級分所對應的原始得分為 53.21 分到 59.85 分

(2) ×：12 級分所對應的原始得分為 73.16 分到 79.80 分

(3) ×：15 級分所對應的原始得分為 93.11 分到 100.00 分

(4) ○：級距一樣，但每一級分的總人數不一定一樣

(5) ×：不一定。因為 15 級分所對應的原始得分為 93.11 分到 100.00 分，而前百分之一考生的平均原始得分約為 99.75 分

故選(1)(4)。

三、選填題

A. 2

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉、第三冊第三章〈平面向量〉

目標：圓的標準式及向量內積的基本定義

解析：設 \overrightarrow{OP} 與 \overrightarrow{OQ} 的夾角為 θ ，

$$\text{則 } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| |\overrightarrow{OQ}| \cos \theta = 1 \times 2 \times \cos \theta = 2 \cos \theta \leq 2。$$

故 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$ 的最大值為 2

B. $\frac{35}{2}$

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：指對數函數與一次函數圖形的交點觀察

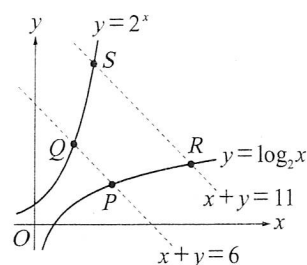
解析：因為 P, Q, R, S 四點皆為格子點

我們不難找到 $P(4, 2), Q(2, 4), S(3, 8), R(8, 3)$

故四邊形 $PQSR$ 為梯形

$$\overline{PQ} = 2\sqrt{2}, \overline{RS} = 5\sqrt{2}, \text{高為 } \frac{|6-11|}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

$$\text{所以四邊形 } PQSR \text{ 的面積為 } \frac{(2\sqrt{2}+5\sqrt{2}) \times \frac{5}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{35}{2}.$$



C. 15

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：解決排列組合問題

解析：因為此訊息對應三個文字

故可視為： $10^{\vee}10^{\vee}10^{\vee}10^{\vee}100^{\vee}1^{\vee}1$ 中選擇兩個 \vee 的位置，

故為 $C_2^6 = 15$ (種)。

第貳部分：非選擇題

一、(1) 64% ; (2) $\frac{2}{3}$

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：轉移矩陣

解析：(1) 此題轉移矩陣 $A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix}$, $X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

$$\text{所以 } X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.36 \end{bmatrix}$$

故兩個月後，大聯購物中心的市場占有率為 64%。

(2) 令穩定狀態為 $X = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix}$ ，其中 $0 \leq a \leq 1$ ，則

$$\begin{aligned} AX = X &\Rightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0.8a + 0.4(1-a) = a \\ 0.2a + 0.6(1-a) = 1-a \end{cases} \Rightarrow a = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

二、(1) 0.92 ; (2) $\frac{17}{200}$; (3) 15.2

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：分析二維數據與應用

解析：二氧化碳濃度 X 的平均 $\mu_x = \frac{33+35+37+39+41}{5} = 37$

全球年平均溫度 Y 的平均 $\mu_y = \frac{14.1+14.4+14.6+14.5+14.9}{5} = 14.5$

$$\begin{aligned} \text{(1) 相關係數 } r &= \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \mu_y)^2}} \\ &= \frac{(-4) \times (-0.4) + (-2) \times (-0.1) + 0 \times 0.1 + 2 \times 0 + 4 \times 0.4}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.1)^2 + 0^2 + (0.4)^2}} \\ &= \frac{3.4}{\sqrt{40} \sqrt{0.34}} = \frac{\sqrt{3.4}}{2} \approx 0.92. \end{aligned}$$

$$(2) \text{迴歸直線斜率 } m = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)^2} = \frac{3.4}{40} = \frac{17}{200} \text{ (或 } 0.085\text{)}。$$

$$(3) Y \text{ 對 } X \text{ 的迴歸直線為 } y - 14.5 = \frac{17}{200} (x - 37)$$

$$\text{令 } x=45 \text{ 代入得 } y = \frac{17}{200} (45 - 37) + 14.5 = 0.68 + 14.5 = 15.18 \approx 15.2。$$

非選擇題批改原則

一、(1) 64% ; (2) $\frac{2}{3}$

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：轉移矩陣

$$\text{解析：(1) 此題轉移矩陣 } A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \text{ (2分), } X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } X_1 = AX_0 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} \text{ (1分)}$$

$$X_2 = AX_1 = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.64 \\ 0.36 \end{bmatrix} \text{ (1分)}$$

故兩個月後，大聯購物中心的市場占有率為 64%。 (1分)

$$(2) \text{ 令穩定狀態為 } X = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix}, \text{ 其中 } 0 \leq a \leq 1, \text{ 則 (1分)}$$

$$AX = X \Rightarrow \begin{bmatrix} 0.8 & 0.4 \\ 0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1-a \end{bmatrix} \text{ (2分)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.8a + 0.4(1-a) = a \\ 0.2a + 0.6(1-a) = 1-a \end{cases} \text{ (1分)} \Rightarrow a = \frac{2}{3}。 \text{ (1分)}$$

二、(1) 0.92 ; (2) $\frac{17}{200}$; (3) 15.2

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：分析二維數據與應用

$$\text{解析：二氧化碳濃度 } X \text{ 的平均 } \mu_x = \frac{33+35+37+39+41}{5} = 37 \text{ (1分)}$$

$$\text{全球年平均溫度 } Y \text{ 的平均 } \mu_y = \frac{14.1+14.4+14.6+14.5+14.9}{5} = 14.5 \text{ (1分)}$$

$$(1) \text{ 相關係數 } r = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sqrt{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 (y_i - \mu_y)^2}}$$

$$= \frac{(-4) \times (-0.4) + (-2) \times (-0.1) + 0 \times 0.1 + 2 \times 0 + 4 \times 0.4}{\sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2} \sqrt{(-0.4)^2 + (-0.1)^2 + (0.1)^2 + 0^2 + (0.4)^2}}$$

$$= \frac{3.4}{\sqrt{40} \sqrt{0.34}} = \frac{\sqrt{3.4}}{2} \approx 0.92。 \text{ (5分)}$$

$$(2) \text{ 迴歸直線斜率 } m = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)(y_i - \mu_y)}{\sum_{i=1}^5 (x_i - \mu_x)^2} = \frac{3.4}{40} = \frac{17}{200} \text{ (或 } 0.085\text{)}。 \text{ (2分)}$$

$$(3) Y \text{ 對 } X \text{ 的迴歸直線為 } y - 14.5 = \frac{17}{200} (x - 37) \text{ (1分)}$$

$$\text{令 } x=45 \text{ 代入得 } y = \frac{17}{200} (45 - 37) + 14.5 = 0.68 + 14.5 = 15.18 \approx 15.2。 \text{ (2分)}$$