

臺中市立高級中學 107 學年度指定科目第二次聯合複習考

數學乙



第壹部分：選擇題

一、單選題：(18 分)

- 已知一個線性規劃問題的可行解區域為四邊形 $ABCD$ 邊界及其內部，其中 $A(2,4)$ ， $B(3,10)$ ， $C(8,8)$ ， $D(12,3)$ 為坐標平面上的四個點。若目標函數 $P = ax + y - \frac{5}{2}$ (a 為實數) 在四邊形 $ABCD$ 的邊界上一點 $C(8,8)$ 有最大值，則 a 值可以是下列哪一個選項？
 (1) $-\frac{3}{2}$ (2) $-\frac{23}{20}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{23}{20}$ (5) $\frac{3}{2}$
- 已知一個二項試驗，其試驗次數為 n ，每次試驗成功的機率為 p_1 ，隨機變數 X 表示成功的次數；另一個二項試驗，其試驗次數為 n ，每次試驗成功的機率為 p_2 ，隨機變數 Y 表示成功的次數。設隨機變數 X ， Y 的期望值以 $E(X)$ ， $E(Y)$ 表示，變異數以 $Var(X)$ ， $Var(Y)$ 表示，標準差以 $\sigma(X)$ ， $\sigma(Y)$ 表示，若已知 $E(X) > E(Y)$ ，則下列敘述何者正確？
 (1) $Var(X) > Var(Y)$ (2) $\sigma(X) > \sigma(Y)$ (3) $E\left(\frac{X}{n}\right) > E\left(\frac{Y}{n}\right)$
 (4) $Var\left(\frac{X}{n}\right) > Var\left(\frac{Y}{n}\right)$ (5) $\sigma\left(\frac{X}{n}\right) > \sigma\left(\frac{Y}{n}\right)$
- 設 $P_1(a_1, b_1)$ ， $P_2(a_2, b_2)$ 是直線上 $y = kx + 2$ (k 為常數) 上兩個不同的點，則關於方程組 $\begin{cases} a_1x + b_1y = 2 \\ a_2x + b_2y = 2 \end{cases}$ 解的情況為何？
 (1) 無論 k, P_1, P_2 如何，方程組為無解 (2) 無論 k, P_1, P_2 如何，方程組為一解
 (3) 無論 k, P_1, P_2 如何，方程組為無限多組解
 (4) 存在 k, P_1, P_2 ，方程組為無解 (5) 存在 k, P_1, P_2 ，方程組有無限多組解

二、多選題：(32 分)

- 已知多項式 $f(x)$ 除以 $x^2 - x - 2$ 的餘式為 $2x + 3$ ，除以 $x^2 + 4x + 3$ 的餘式為 $7x + a$ ，又除以 $x^2 + x - 6$ 的餘式為 $bx + c$ 。試選出正確選項。
 (1) $f(2) = 7$ (2) $a = 8$ (3) $b = -4$ (4) $c = -1$ (5) $a + b + c = 3$
- $\triangle ABC$ 是邊長為 2 的正三角形，已知向量 \vec{a} ， \vec{b} 滿足 $\vec{AB} = 2\vec{a}$ ， $\vec{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$ 。試選出正確選項。
 (1) $\vec{a} \perp \vec{b}$ (2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ (3) $(4\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{BC}$
 (4) 若 $\vec{AP} = 2\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ，則 P 點在線段 \overline{BC} 上
 (5) 若 $\vec{AQ} = \frac{8}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ ，則 Q 點在 $\triangle ABC$ 內部

- 設 n 為正整數，令轉移矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ， $A^n = \begin{bmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{bmatrix}$ 。試選出正確選項。

(1) $d_3 = \frac{1}{27}$ (2) $\langle d_n \rangle$ 為等比數列 (3) $b_n - d_n = (-\frac{1}{3})^n$

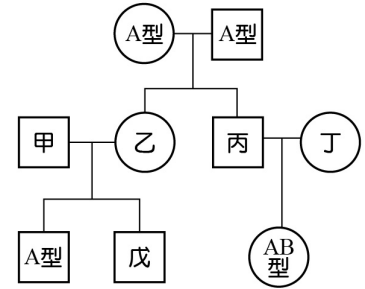
(4) $d_1 + d_2 + \dots + d_n = 2b_n$ (5) $\det(A^n) = \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{vmatrix} = (\frac{2}{3})^n$

7. 1900 年，奧地利科學家藍施泰納(Karl Landsteiner, 1868~1943)，將人類血型分為 A、B、O 及 AB 四種血型，由紅血球細胞膜上的表面抗原所決定。控制 ABO 血型的等位基因共有 3 種，包括 I^A 、 I^B 與 i ，其中 I^A 和 I^B 均為顯性，而 i 為隱性。複等位基因中的任何兩個等位基因都可以互相組合，總共有 4 種表現型以及 6 種基因型，如下表(1)

表(1)

| | | | | |
|-----|---------------------|---------------------|-----------|------|
| 表現型 | A | B | AB | O |
| 基因型 | $I^A I^A$ 、 $I^A i$ | $I^B I^B$ 、 $I^B i$ | $I^A I^B$ | ii |

圖(1)為某一家人的族譜圖(○：女性；□：男性)，若子代和孫代皆為婚配所生。試選出正確選項。



圖(1)

- (1) 乙和丙血型的表現型必相同
- (2) 若乙血型的表現型為 O 型，則戊血型的表現型可能為 B 型
- (3) 若乙血型的表現型為 A 型，且甲血型的表現型為 AB 型，則戊血型的表現型不可能為 O 型
- (4) 若丙血型的基因型為 $I^A I^A$ ，則丁血型的基因型必為 $I^B I^B$
- (5) 若戊血型的基因型為 $I^A I^A$ ，且甲血型的基因型為 $I^A I^A$ ，則乙血型的基因型必為 $I^A I^A$

三、選填題：(24 分)

- A. 某畢業生參加人才招募博覽會，分別向甲、乙、丙三家公司投遞履歷，假定該畢業生得到甲公司面試的機率為 $\frac{2}{3}$ ，得到乙、丙兩公司面試的機率均為 $\frac{1}{2}$ ，且三家公司是否讓其面試是獨立的，則該畢業生至少得到兩家公司面試的機率為_____。(請化為最簡分數)。
- B. 某校為了因應即將舉行的中區能力競賽，教務處特別在競賽前三周的星期一至星期三將全校科教股長集合說明相關事項，已知星期一到星期三各有 15、11、9 個班級的科教股長集合未到，若這三天共有 21 個班級的科教股長集合未到，則這三天中連續三天最多有_____個不同班級的科教股長皆集合未到。
- C. 設 a, b 均為整數，若多項式方程式 $f(x) = x^2 + ax - 6 = 0$ 的兩根為相異有理根，且 $f(x) = 0$ 的兩根亦為 $g(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + b = 0$ 的根，則 $a + b =$ _____。

第貳部分：非選擇題(26分)

一、中國古代音樂選定「宮商角徵羽」五種相對音高做為旋律的基礎，是來自於「三分損益法」前五音的結果。「三分損益法」是已知中國最早用來計算發聲體長度和音高關係的方法，在司馬遷的《史記》〈律書第三〉中寫到：「……九九八十一以為宮。三分去一，五十四以為徵。三分益一，七十二以為商。三分去一，四十八以為羽。三分益一，六十四以為角。」，「宮」是基本音，有了基本音「宮」之後，經過幾次的「三分損益」，其它的四個音階也就產生了。

又音階與頻率存在著轉換關係，若 f_1 與 f_2 差 n 個半音，則運算公式為

$$n = 12 \times \log_2\left(\frac{f_1}{f_2}\right), \text{ 例如：} C \text{ 比 } A \text{ 低 } 9 \text{ 個半音，則 } C \text{ 的頻率 } f \text{ 由算式：} -9 = 12 \times \log_2\left(\frac{f}{440}\right)$$

得 $f = 261.6(\text{Hz})$ ，其中 A 為標準音高，且頻率訂為 440Hz 。已知「宮」相當於今首調唱名中的 do 音，且 C 調音階 $do、re、mi、fa、so、la、ti、do$ 之頻率分別為 $261.6、293.7、329.6、349.2、392.0、440.0、493.9、523.2(\text{Hz})$ 。

試回答下列問題：

(1) 已知發聲體長度和頻率成反比，且五音中的「宮」之頻率為 $261.6(\text{Hz})$ ，依據

「三分損益法」，「徵」的發聲體長度為「宮」的 $\frac{2}{3}$ 倍，試求五音中的「徵」

之頻率。(四捨五入取到小數點後第一位) (3分)

(2) 若頻率 f_1 比頻率 f_2 多 12 個半音，求頻率比值 $\frac{f_1}{f_2}$ 。(4分)

(3) 試求 C 調音階中 ti 高出 mi 多少半音？(四捨五入取到整數位) (6分)

($\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 1.498 \approx 0.1755$)

二、根據以往經驗，工程施工期間的降雨量會影響到工程的進度，表(2)為降雨量 X (單位：mm)對工程進度影響：

表(2)

| 降雨量 X | $X < 300$ | $300 \leq X < 600$ | $600 \leq X < 900$ | $X \geq 900$ |
|------------|-----------|--------------------|--------------------|--------------|
| 工程延誤天數 Y | 0 | 4 | 6 | 10 |

歷年氣象資料表明，該工程施工期間降雨量 X 小於 300，600，900 的機率分別為 0.2，0.6，0.9，求：

(1) 根據上述資料，工程延誤天數達 10 天的機率為何？(3分)

(2) 在降雨量 X 至少 300 的條件下，工期延誤不超過 6 天的機率為何？(4分)

(3) 工程延誤天數 Y 的期望值？(6分)

RB598 臺中市立高級中學 107 學年度指定科目第二次聯合複習考數學乙

選擇題：1. (4) 2. (3) 3. (2) 4. (1)(2)(4) 5. (2)(3)(4) 6. (2)(4)(5) 7. (2)(3)

選填題：A. $\frac{7}{12}$ B. 7 C. 25

非選擇題：一、(1) 392.4(Hz) (2) 2 (3) 7

二、(1) 0.1 (2) $\frac{7}{8}$ (3) 4.4