臺中市立高級中等學校 107 學年度指定科目第二次聯合複習考試

數學乙考科解析

考試日期：108 年 3 月 12~13 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	
4	3	2	124	234	245	23	7	1	2	7	2	5	

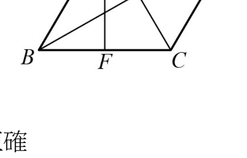
第壹部分：選擇題

一、單選題

1. $\because$ 目標函數 $P=ax+y-\frac{5}{2}$ 斜率 $m=-a$，
 且在 $C(8,8)$ 有最大值，
 又 $m_{\overline{BC}}=\frac{8-10}{8-3}=-\frac{2}{5}$，$m_{\overline{CD}}=\frac{3-8}{12-8}=-\frac{5}{4}$
 $\therefore -\frac{5}{4}\le -a\le -\frac{2}{5}\Rightarrow \frac{2}{5}\le a\le \frac{5}{4}$，故選(4)
2. $\because E(X)=np_1>E(Y)=np_2$，$\therefore p_1>p_2$
 (1) $Var(X)=np_1(1-p_1)$，$Var(Y)=np_2(1-p_2)$，
 兩者大小不確定
 (2) $\sigma(X)=\sqrt{np_1(1-p_1)}$，$\sigma(Y)=\sqrt{np_2(1-p_2)}$，
 兩者大小不確定
 (3) $E(\frac{X}{n})=p_1>E(\frac{Y}{n})=p_2$
 (4) $Var(\frac{X}{n})=\frac{1}{n^2}Var(X)=\frac{p_1(1-p_1)}{n}$，
 $Var(\frac{Y}{n})=\frac{1}{n^2}Var(Y)=\frac{p_2(1-p_2)}{n}$，
 兩者大小不確定
 (5) $\sigma(\frac{X}{n})=\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n}}$，$\sigma(\frac{Y}{n})=\sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n}}$，
 兩者大小不確定
 故選(3)
3. 因為 $P_1(a_1,b_1)$，$P_2(a_2,b_2)$ 是直線上 $y=kx+2$ (k 為常數)上兩個不同的點，所以 $b_1=ka_1+2$，$b_2=ka_2+2$，
 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=a_1(ka_2+2)-a_2(ka_1+2)$，
 $=2(a_1-a_2)\ne 0$，所以方程組一定有唯一解，
 故選(2)

二、多選題

4. $\because f(x)=(x-2)(x+1)Q_1(x)+2x+3$ 且
 $f(x)=(x+3)(x+1)Q_2(x)+7x+a$，$\therefore f(2)=2\times 2+3=7$
 又以 $x=-1$ 代入，得 $-2+3=-7+a$，故 $a=8$
 又若 $f(x)=(x-2)(x+3)Q_3(x)+bx+c$，
 以 $x=2$ 及 $x=-3$ 分別代入便得
 $\begin{cases} 2b+c=2\times 2+3 \\ -3b+c=7\times(-3)+8 \end{cases}$，解得 $b=4$，$c=-1$，
 且 $a+b+c=11$
 故選(1)(2)(4)
5. 由題意可知 $\overrightarrow{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{BC}$，
 如圖在邊長為 2 的菱形 $ABCD$ 中，
 $\angle ABC=60°$，E 為 $\overline{AB}$ 中點，
 則有 $\overrightarrow{a}=\overrightarrow{AE}$，$\overrightarrow{b}=\overrightarrow{AD}$，
 可知



 (1) 錯誤
 (2) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times 2\times\cos 120^\circ=-1$，正確
 (3) 取 $\overline{BC}$ 中點 F，則 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{a}+\frac{1}{2}\overrightarrow{b}$，
 又 $\overline{AF}\perp\overline{BC}$，所以 $(4\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{BC}$ 正確
 (4) $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{b}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$
 $=x(2\overrightarrow{a})+y(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$
 可解得 $x=\frac{1}{3},y=\frac{2}{3}$，$x+y=1$，
 由共線定理知，P 點在 $\overline{BC}$ 上，正確
 (5) $\overrightarrow{AQ}=\frac{8}{3}\overrightarrow{a}+\frac{2}{3}\overrightarrow{b}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$
 $=x(2\overrightarrow{a})+y(2\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})$
 可解得 $x=\frac{2}{3},y=\frac{2}{3}$，$x+y>1$，
 則 Q 點在 $\triangle ABC$ 外部
 故選(2)(3)(4)
6. A 為轉移矩陣，$A^2=\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{9} \\ 0 & \frac{4}{9} \end{bmatrix}$，$A^3=\begin{bmatrix} 1 & \frac{19}{27} \\ 0 & \frac{8}{27} \end{bmatrix}$，…
 由轉移矩陣性質知 $A^n=\begin{bmatrix} 1 & 1-(\frac{2}{3})^n \\ 0 & (\frac{2}{3})^n \end{bmatrix}$
 (1) ×：$d_3=\frac{8}{27}$
 (2) ○：$d_1=\frac{2}{3},d_2=\frac{4}{9},d_3=\frac{8}{27},\cdots$ 為等比數列
 (3) ×：$b_n-d_n=1-2(\frac{2}{3})^n$
 (4) ○：$d_1+d_2+\ldots+d_n=\frac{2}{3}+(\frac{2}{3})^2+\cdots+(\frac{2}{3})^n$
 $=\frac{\frac{2}{3}[1-(\frac{2}{3})^n]}{1-\frac{2}{3}}=2[1-(\frac{2}{3})^n]=2b_n$
 (5) ○：$\det(A^n)=(\frac{2}{3})^n$
 故選(2)(4)(5)
7. (1) ×：乙和丙血型的表現型可能是 A 或 O 型
 (2) ○：若乙血型的表現型為 O 型，故甲血型的表現型可能為 A 型或 AB 型，故戊血型的表現型可能為 O、A、B 型
 (3) ○：若乙血型的表現型為 A 型，且甲血型的表現型為 AB 型，則戊血型的表現型可能為 A、B、AB 型
 (4) ×：若丙血型的基因型為 I^AI^A，則丁血型的基因型可能為 I^BI^B、I^Bi、I^AI^B
 (5) ×：若戊血型的基因型為 I^AI^A 且甲血型的基因型為 I^AI^A，則乙血型的基因型可能為 I^AI^A 或 I^Ai
 故選(2)(3)

三、選填題

A. 設隨機變數 X 為獲得面試的公司數

$\because P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

$P(X=1)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+C_1^2\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

$P(X=2)=C_1^2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{12}$

$P(X=3)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

$\therefore$ 所求 $P(X\ge 2)=P(X=2)+P(X=3)=\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12}$

B. 設 A 表示星期一科教股長未到班級的事件
B 表示星期二科教股長未到班級的事件
C 表示星期三科教股長未到班級的事件
因為求連續三天最多有幾個班級的科教股長
都集合未到，故滿足
$n(A\cap B)=n(B\cap C)=n(C\cap A)=n(A\cap B\cap C)$
並假設 $n(A\cap B\cap C)=x$ ，
故可得 $(15-x)+(11-x)+(9-x)+x=21$
$\therefore x=7$
故連續三天最多有 7 個不同班級的科教股長都集合未到

C. $f(x)=x^2+ax-6=0$ 的兩根為 α,β ，
可知 $\alpha+\beta=-a,\alpha\beta=-6$
$g(x)=x^3-3x^2-10x+b=0$ 的三根為 α,β,γ

$$\begin{cases}\alpha+\beta+\gamma=-a+\gamma=3\\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-6+(-a)\gamma=-10\\ \alpha\beta\gamma=-6\gamma=-b\end{cases}$$

將 $\gamma=3+a$ 代入 $-6+(-a)\gamma=-10$ 可知
$-6+(-a)(3+a)=-10 \quad \therefore a=1 \text{ or } -4$
若 $a=-4$ 代回 $f(x)=x^2+ax-6=0$ 兩根並非有理根，故不合
若 $a=1$ 代回 $f(x)=x^2+ax-6=0$ 兩根皆為有理根，
且兩根為 2， -3
$\gamma=3+a=4$ 代回 $-6\gamma=-b$ ， $b=24$
所以 $a+b=25$

第貳部分：非選擇題

一、(1) 392.4(Hz)　(2) 2　(3) 7

【詳解】

(1) $\because$ 發聲體長度和頻率成反比，若“宮”之頻率為 261.6(Hz)
由三分損益法知，“徵”之頻率為

$261.6\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=392.4(\text{Hz})$ (3 分)

(2) 由關係式 $n=12\times\log_2(\frac{f1}{f2})$ 可得，

$12=12\times\log_2(\frac{f1}{f2})$ (2 分)，故 $\frac{f1}{f2}=2$ (2 分)

(3) $\because C$ 調音階中 ti 與 mi 的頻率分別為 493.9(Hz)及 329.6(Hz)

$\therefore n\approx 12\times\log_2(\frac{493.9}{329.6})$ (1 分)

$\approx 12\times\log_2 1.498=12\times\frac{\log 1.498}{\log 2}$ (2 分)

$\approx 12\times\frac{0.1755}{0.3010}\approx 6.9967$ (2 分)

取 $n=7$ (1 分)

二、(1) 0.1　(2) $\frac{7}{8}$　(3) 4.4

【詳解】

(1) $P(X\ge 900)=1-0.9=0.1$ (3 分)

(2) $\because P(300\le X<900)=0.3+0.4=0.7$ (1 分)
$P(X\ge 300)=0.4+0.3+0.1=0.8$ (1 分)
$\therefore P(Y\le 6\,|\,X\ge 300)=P(X<900\,|\,X\ge 300)$ (1 分)
$=\frac{P(300\le X<900)}{P(X\ge 300)}=\frac{0.7}{0.8}=\frac{7}{8}$ (1 分)

(3) $E(Y)=0\cdot P(X<300)+4\cdot P(300\le X<600)+$
$6\cdot P(600\le X<900)+10\cdot P(X\ge 900)$
$=0\times 0.2+4\times 0.4+6\times 0.3+10\times 0.1=4.4$(天) (6 分)

若只個別求出 $P(X<300)=0.2$ ，
$P(300\le X<600)=0.4$ ， $P(600\le X<900)=0.3$ ，
$P(X\ge 900)=0.1$ 各得 1 分