全國高中 108 年(107 學年度)高三下
第六次指考模擬考數學(社會組)(107-E6)試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇題（占 74 分）

一、單選題（占 18 分）

1. 設 a 、b 是兩個正實數，已知 $\log a = 11.56$ ，$\log b = 12.966$ ，試問 b^{10} 大約是 a^{11} 的多少倍？（已知 $\sqrt{10} \approx 3.16$ ）
(1)一倍　(2)一百多倍　(3)三百多倍　(4)一千多倍　(5)三千多倍。　【108 全國模⑥】

答：(3)

解：$\log \dfrac{b^{10}}{a^{11}} = 10\log b - 11\log a = 129.66 - 127.16 = 2.5 = \log 10^{\frac{5}{2}} = \log 316.\cdots$

2. 設等腰三角形的三邊長為 a 、b 、c ，且 a 、b 、c 皆為正整數，若 $|a-b-c|+|b-a-c|+|c-a-b|=30$ ，則滿足條件的等腰三角形中，有幾種不同的形狀？
(1)4 種　(2)5 種　(3)6 種　(4)7 種　(5)8 種。　【108 全國模⑥】

答：(4)

解：$|a-b-c|+|b-a-c|+|c-a-b|=30$
$\Rightarrow (b+c-a)+(c+a-b)+(a+b-c)=a+b+c=30$
$\Rightarrow (14,14,2),(13,13,4),(12,12,6),(11,11,8),(10,10,10)$，共 5 種

3. 設事件 A 發生的機率為 $P(A)=\dfrac{1}{3}$ ，事件 B 發生的機率為 $P(B)=\dfrac{1}{4}$ ；若 A 與 B 為獨立事件，則事件 $A-B$ 發生的機率 $P(A-B)=$ ？
(1) $\dfrac{1}{12}$　(2) $\dfrac{1}{6}$　(3) $\dfrac{1}{4}$　(4) $\dfrac{1}{3}$　(5) $\dfrac{1}{2}$ 。　【108 全國模⑥】

答：(3)

解：$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=\dfrac{1}{4}$

二、多選題（占 32 分）

4. 已知二階轉移矩陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，且 A 的反方陣為 $A^{-1}=\begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & f \end{bmatrix}$ ，請問下列哪些選項是正確的？
(1) $a+b+c+d=2$　(2) $e=-1$　(3) $f=-2$　(4) $A\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$
(5)若 $A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 且 $x+y=1$ ，則 $xy=\dfrac{2}{9}$ 。　【108 全國模⑥】

答：(1)(2)(5)

解：(1) A 為轉移矩陣，故 $\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=1 \\ 0\le a,b,c,d\le 1 \end{cases} \Rightarrow a+b+c+d=2$

(2)(3) $AA^{-1}=\begin{bmatrix} a & b \\ 1-a & 1-b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & 1 \\ 2 & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ae+2b & a+bf \\ e-ae+2-2b & 1-a+f-bf \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} e=-1 \\ f=0 \end{cases}$，故 $A^{-1}=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，故 $A=\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$ (5) $\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ y=2x \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$

5. 桌上覆蓋了點數1、2、3及4的四張紙牌，玩家僅知道這四種點數各有一張牌，但不知各紙牌的點數，如下所示：

此紙牌遊戲進行方式如下：「甲、乙兩人依序從中隨機各掀開一張紙牌，每張牌被掀開的機率均等，點數較大者得1分；接著再依序從剩下的兩張紙牌中隨機各掀開一張，點數較大者再得1分。」最後甲、乙總得分較多者獲勝，請問下列哪些選項是正確的？

(1)甲選到點數1的機率為 $\frac{1}{2}$

(2)甲選到點數1與2的機率為 $\frac{1}{4}$

(3)若甲知道點數1的紙牌位置且不會故意選它，則甲選到點數1的機率為 $\frac{1}{2}$

(4)若乙知道點數1的紙牌位置且不會故意選它，則甲選到點數1的機率為 $\frac{1}{2}$

(5)若乙知道點數1的紙牌位置且不會故意選它，則乙獲勝的機率為 $\frac{1}{4}$。【108 全國模⑥】

答：(1)

解：(1) $\dfrac{\underbrace{(2)}_{1點在第一或第三次選出}\times 3!}{4!}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{\underbrace{(2!)}_{1,2點在第一或第三次選出}\times 2!}{4!}=\dfrac{1}{6}$

(3)機率應為0

(4) $\underbrace{\dfrac{1}{4}}_{1點在第一次選出}+\underbrace{\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{2}\times\dfrac{1}{2}}_{乙避開第二次抽1點，1點在第三次選出}=\dfrac{5}{8}$

(5) $\underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right)\times 3}_{(1,2,3,4),(1,3,2,4),(1,4,2,3)} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right)\times 3}_{(2,3,1,4),(2,4,1,3),(3,4,1,2)} = \frac{5}{16}$

6. 已知兩變數 X 、Y 的數據如下：

X	1	2	4	a
Y	8	7	b	3

令 X 、Y 的算術平均數分別為 μ_1 、μ_2，其標準差分別為 σ_1 、σ_2，X 與 Y 的相關係數為 $r=-0.5$，以最小平方法得 Y 對 X 的迴歸直線為直線 L。現在將兩變數的數據互換後如下：

X'	8	7	b	3
Y'	1	2	4	a

令 X' 與 Y' 的相關係數為 r'，以最小平方法得 Y' 對 X' 的迴歸直線仍為直線 L，試問下列哪些選項恆成立？

(1) $r'=-0.5$　(2)直線 L 的斜率小於 0　(3) $\sigma_1=\sigma_2$　(4) $\mu_1=\mu_2$　(5) $b=a+11$。

【108 全國模⑥】

$\boxed{答}$：(1)(2)(3)(4)

$\boxed{解}$：(1) $r_{(Y,X)}=r_{(X,Y)}=-0.5$

(2) L 的斜率與相關係數同號，故小於 0

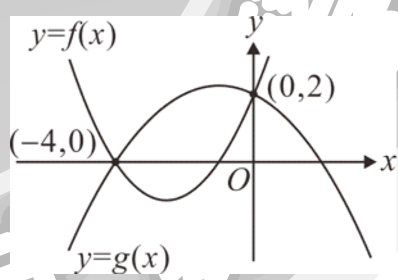
(3) $m=r'\times\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=r\times\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\xrightarrow{r'=r}\sigma_1=\sigma_2$

(4) L：$(y-\mu_2)=-0.5(x-\mu_1)$ 且 $(y-\mu_1)=-0.5(x-\mu_2)$

相減：$(\mu_1-\mu_2)=-0.5(\mu_2-\mu_1)\xrightarrow{\mu_1-\mu_2=0}\mu_1=\mu_2$

(5)承(4)：$\mu_1=\mu_2\Rightarrow\frac{1+2+4+a}{4}=\frac{8+7+b+3}{4}\Rightarrow a=b+11$

7. 已知兩個二次函數 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 的圖形恰相交於 $(-4,0)$ 及 $(0,2)$ 兩點，其函數圖形如右所示，若函數 $y=f(x)-g(x)$ 有最小值 -2，則下列哪些選項是正確的？



(1)不等式 $f(x)-g(x)>0$ 的解為 $-4<x<0$

(2) $x+4$ 是多項式 $f(x)+g(x)$ 的因式

(3)函數 $y=f(x)-g(x)$ 的圖形是凹口向上的拋物線

(4) $f(-2)=g(-2)-2$

(5)方程式 $f(x)g(x)=0$ 的所有根的乘積大於 0 。

【108 全國模⑥】

$\boxed{答}$：(2)(3)(4)

$\boxed{解}$：(1)不等式 $f(x)-g(x)>0$ 的解為 $x>0$ 或 $x<-4$

(2) $f(x)=(x+4)\left(ax+\frac{1}{2}\right)$ 、$g(x)=(x+4)\left(cx+\frac{1}{2}\right)$

$f(x)+g(x)=(x+4)[(a+c)x+1]$

(3) $f(x)-g(x)=(x+4)[(a-c)x]\xrightarrow{a>0,c<0\Rightarrow a-c>0}$ 開口向上

(4) $f(x)-g(x)=(a-c)\left[(x+2)^2-4\right]$

已知$y=f(x)-g(x)$有最小值$-2\xrightarrow{a-c=\frac{1}{2}}f(x)-g(x)=\frac{1}{2}\left[(x+2)^2-4\right]$

(5)由圖知，$f(x)=0$有兩負根，$g(x)=0$有一正一負根，故四根之積為負

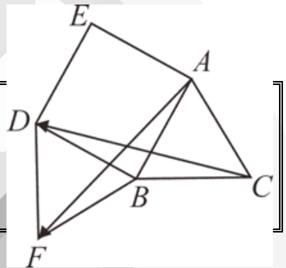
三、選填題（占 24 分）

A. 甲、乙、丙、丁、戊、己等六人到速食店點餐，只剩麥香雞、麥香魚、麥香豬等三種套餐可以選擇，且每種套餐都是僅剩4份可提供，若每個人選擇一份套餐，且甲、乙不要選擇同一種套餐，則這六個人選擇套餐的方式有________種。【108 全國模⑥】

答：474

解：$\underset{甲}{3}\times\underset{乙}{2}\times\underbrace{\left(3^4-2\right)}_{其餘四人}=6\times(79)=474$

B. 如右圖，有兩個正ΔABC、ΔBDF及正方形$ABDE$，若正ΔABC的邊長為2，則$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CD}=$________。（化為最簡根式）【108 全國模⑥】



答：$4+2\sqrt{3}$

解：$B(0,0)$、$A(0,2)$、$C\left(\sqrt{3},1\right)$、$D(-2,0)$、$F\left(-1,-\sqrt{3}\right)$

則$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(-1,-2-\sqrt{3}\right)\cdot\left(-2-\sqrt{3},-1\right)=2+\sqrt{3}+2+\sqrt{3}=4+2\sqrt{3}$

C. 兩個實係數多項式分別為$f(x)=x^4+ax^3+6x^2+3x+2$、$g(x)=x^4+x^3+2x^2+bx+1$，$f(x)$除以$\left(x^2+2x+3\right)$所得的餘式為$r(x)$，$g(x)$除以$\left(x^2+2x+3\right)$所得的餘式為$2r(x)$，則數對$(a,b)=$______。【108 全國模⑥】

答：$(3,-5)$

解：$\begin{cases}f(x)=x^4+ax^3+6x^2+3x+2=\left(x^2+2x+3\right)Q_1(x)+r(x)\\ g(x)=x^4+x^3+2x^2+bx+1=\left(x^2+2x+3\right)Q_2(x)+2r(x)\end{cases}$

$\Rightarrow 2f(x)-g(x)=x^4+(2a-1)x^3+10x^2+(6-b)x+3=\left(x^2+2x+3\right)Q(x)$

$\Rightarrow\begin{cases}12-4a=0\\13-6a-b=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\b=-5\end{cases}$

第貳部分：非選擇題（占 26 分）

1. 設聯立不等式$\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\\ 2x-3y+6\geq 0\\ x+y-7\leq 0\end{cases}$的可行解區域為$\Omega$：

(1)請在坐標平面上畫出可行解區域Ω；並求區域Ω的面積。

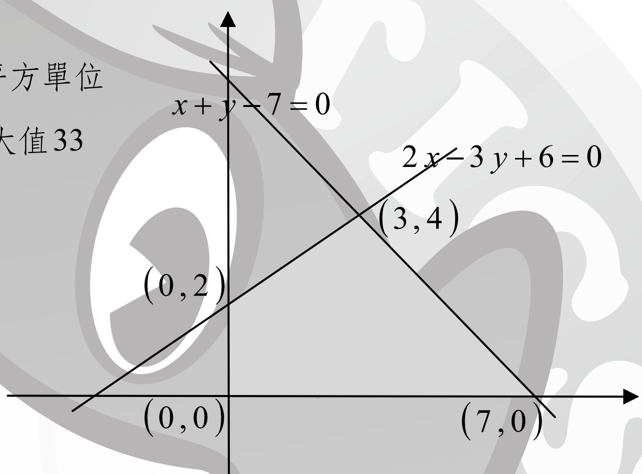
(2)在上述聯立不等式的限制下，試求目標函數$3x+6y$的最大值。

(3)將上述聯立不等式再加入一個條件後，得新聯立不等式為$\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ 2x-3y+6\ge 0 \\ x+y-7\le 0 \\ x-ky\ge 3 \end{cases}$，

在此新聯立不等式的限制下，可使目標函數$3x+6y$有最大值29，則實數$k=$？

【108 全國模⑥】

答：(1)圖略；17 平方單位　(2)33　(3)$\frac{1}{2}$



解：(1)圖如右；面積$=\frac{7\times 7}{2}-\frac{5\times 3}{2}=17$平方單位

(2)在$(x,y)=(3,4)$時，$3x+6y$有最大值33

(3)由$\begin{cases} x+y-7=0 \\ 3x+6y=29 \end{cases}$得知

在$(x,y)=\left(\frac{13}{3},\frac{8}{3}\right)$時

$3x+6y$有最大值29

亦即$x-ky=3$過$\left(\frac{13}{3},\frac{8}{3}\right)\Rightarrow k=\frac{1}{2}$

2. 一個袋子內裝有大小相同的m顆紅球和n顆白球（其中m、n為正整數），總球數不超過100顆球，每顆球由袋中被取出的機會均等。每次由袋中取出一球，取後不放回，連續取兩次，設取出紅球的次數為x次，$x=0$、1、2，其得分記為$(6x+5)$分。

(1)若$m=n=5$，求取出一紅球及一白球的機率$P(x=1)=$？

(2)請以m、n表示取得紅球的次數x的期望值$E(x)$。

(3)承(2)，若取球得分的期望值為$E(6x+5)=10$分，則此袋中最多有多少顆球？（即球$m+n$的最大值）

【108 全國模⑥】

答：(1)$\frac{5}{9}$　(2)$\frac{2m}{m+n}$　(3)96

解：(1)$\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\times 2!=\frac{5}{9}$

(2)$E(x)=2\left(\frac{m}{m+n}\times\frac{m-1}{m+n-1}\right)+1\left(\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}\times 2!\right)+0\left(\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}\right)$

$=\frac{2m(m-1+n)}{(m+n)(m+n-1)}=\frac{2m}{m+n}$

(3)$E(6x+5)=6E(x)+5=10\Rightarrow E(x)=\frac{5}{6}=\frac{2m}{m+n}\Rightarrow 7m=5n$

$m+n=5t+7t\le 100\xrightarrow{t\in N}t\le 8$，則此袋中最多有$8\times 12=96$顆球