數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.		
答案	(3)	(4)	(3)	(1)(2)(5)	(1)	(1)(2)(3)(4)	(2)(3)(4)		

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉

目標：評量對數定義與數值評估

解析：$\log a=11.56$，$\log b=12.966$，得 $a=10^{11.56}$，$b=10^{12.966}$，

$a^{11}=(10^{11.56})^{11}=10^{127.16}$，$b^{10}=10^{129.66}$，

$\dfrac{b^{10}}{a^{11}}=\dfrac{10^{129.66}}{10^{127.16}}=10^{2.5}=10^2\times10^{0.5}=100\sqrt{10}\approx316$，故選(3)。

2. (4)

出處：第一冊第一章〈數與式〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：絕對值運算及列舉概念

解析：$\because$等腰三角形三邊長為 a、b、c

$\therefore a+b-c>0$；$b+c-a>0$；$c+a-b>0$

$|a-b-c|+|b-a-c|+|c-a-b|=30\Rightarrow a+b+c=30$

不妨設 $a=b$，則 $(a,b,c)=(14,14,2)$、$(13,13,4)$、$(12,12,6)$、$(11,11,8)$、$(10,10,10)$、$(9,9,12)$、$(8,8,14)$ 共 7 種

故選(4)。

3. (3)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：評量獨立事件

解析：A 與 B 是獨立事件

$P(A\cap B)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

$\Rightarrow P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$

故選(3)。

二、多選題

4. (1)(2)(5)

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：評量矩陣的運算(轉移矩陣)

解析：(1) ○：$\because A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$是轉移矩陣 $\therefore a+c=1$ 且 $b+d=1$

故 $a+b+c+d=2$

(2) ○：$AA^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e & 1\\ 2 & f\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ae+2b & a+bf\\ ce+2d & c+df\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$\begin{cases}ae+2b=1\\ ce+2d=0\end{cases}$

$\Rightarrow (a+c)e+2(b+d)=1$ ($\because a+c=1$，$b+d=1$)

$\Rightarrow e+2=1$

$\Rightarrow e=-1$

(3) ✕：承(2)，

$\begin{cases}a+bf=0\\ c+df=1\end{cases}$

$\Rightarrow (a+c)+(b+d)f=1$

$\Rightarrow 1+f=1$

$\Rightarrow f=0$

(4) ╳：$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$，$\det(A^{-1})=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2$

$$A=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}0 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$A\begin{bmatrix}2\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 6\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}8\\ 2\end{bmatrix}$$

(5) ○：承(4)，$A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{1}{2}y\\ x+\frac{1}{2}y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\Rightarrow\frac{1}{2}y=x，x+\frac{1}{2}y=y\Rightarrow y=2x$$

又 $x+y=1$，得 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{2}{3}$

故 $xy=\frac{2}{9}$

故選(1)(2)(5)。

5. (1)

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：評量機率的乘法定理

解析：令甲、乙依序選取的點數為 a、b、c、d，共有 4! 種可能

(1) ○：甲選到點數 1 的機率為 $\frac{2\times 3!}{4!}=\frac{1}{2}$

(2) ╳：甲選到點數 1 與 2 的機率為 $\frac{2!\times 2!}{4!}=\frac{1}{6}$

(3) ╳：若甲知道點數 1 的紙牌位置且不會故意選它，則甲選到點數 1 的機率為 0

(4) ╳：若乙知道點數 1 的紙牌位置且不會故意選它，

則甲選到點數 1 的機率為 $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{8}$

(5) ╳：若乙知道點數 1 的紙牌位置且不會故意選它，則乙獲勝的情形有

$(a,b,c,d)=(1,2,3,4)$、$(1,3,2,4)$、$(1,4,2,3)$、$(2,3,1,4)$、$(2,4,1,3)$、$(3,4,1,2)$

故乙獲勝的機率為 $3\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right)+3\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}\right)=\frac{5}{16}$

故選(1)

6. (1)(2)(3)(4)

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：評量相關係數與迴歸直線

解析：(1) ○：由相關係數的定義可知 $r_{(X,Y)}=r_{(Y,X)}$，即 $r'=r=-0.5$

(2) ○：設直線 L 的斜率為 m，又 $r<0$，且 σ_1、σ_2 都大於 0，故 $m=r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}<0$

(3) ○：$m=r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，又 $r=-0.5\neq 0$，故 $\frac{\sigma_2}{\sigma_1}=\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$，可知 $\sigma_1=\sigma_2$

(4) ○：由(3)可知，$m=r\times 1=-0.5$，由題意可知 L：$y=-0.5x+k$ 通過 (μ_1,μ_2) 與 (μ_2,μ_1) 兩點

$\mu_2=-0.5\mu_1+k$ 且 $\mu_1=-0.5\mu_2+k$

得 $\mu_2-\mu_1=-0.5\mu_1+0.5\mu_2$，$0.5\mu_1=0.5\mu_2$，故 $\mu_1=\mu_2$

(5) ╳：承(4)，又 $\mu_1=\frac{a+7}{4}$，$\mu_2=\frac{b+18}{4}$，故 $\frac{a+7}{4}=\frac{b+18}{4}$，$a=b+11$

故選(1)(2)(3)(4)。

7. (2)(3)(4)

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：評量二次函數圖形

解析：(1) ╳：$f(x)-g(x)>0 \Rightarrow f(x)>g(x)$，由圖形可知滿足此條件的 x 範圍為 $x<-4$ 或 $x>0$

(2) ○：$f(-4)=0$，$g(-4)=0 \Rightarrow f(-4)+g(-4)=0$，可知 $x+4$ 是多項式 $f(x)+g(x)$ 的因式

(3) ○：設 $f(x)$、$g(x)$ 的首項係數為 a、b，由圖可知 $a>0$，$b<0$

可得 $f(x)-g(x)$ 的首項係數 $a-b$ 大於 0

即圖形為凹口向上的拋物線

(4) ○：由圖形可知 $f(-4)-g(-4)=0$ 且 $f(0)-g(0)=0$，則二次函數 $y=f(x)-g(x)$ 對稱於 $x=-2$，故最小值 $f(-2)-g(-2)=-2$，即 $f(-2)=g(-2)-2$

(5) ╳：由圖形可知 $f(x)=0$ 有 2 個負根，$g(x)=0$ 有 1 個正根及 1 個負根，故方程式 $f(x)g(x)=0$

$\Rightarrow f(x)=0$ 或 $g(x)=0$，有 3 個負根及 1 個正根，所有根的乘積小於 0

故選(2)(3)(4)。

三、選填題

A. 474

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：評量重複排列

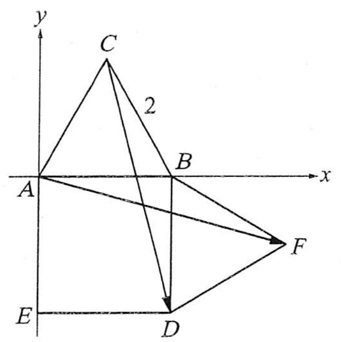
解析：$3\times2\times(3^4-2)=474$（種）。

B. $4+2\sqrt{3}$

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：評量向量的內積坐標表示法

解析：取一坐標系，如下圖



得 $A(0,0)$，$F(2+\sqrt{3},-1)$，$C(1,\sqrt{3})$，$D(2,-2)$

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CD}=(2+\sqrt{3},-1)\cdot(1,-2-\sqrt{3})=4+2\sqrt{3}$。

〈另解〉

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CD}&=(\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC})\\&=\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}\\&=2\times2\times\frac{1}{2}-0-2\times2\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2\times2\times\frac{1}{2}\\&=4+2\sqrt{3}\text{。}\end{aligned}$$

C. $(3,-5)$

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：多項式的除法原理與比較係數

解析：令 $f(x)=(x^2+2x+3)q_1(x)+r(x)$

$g(x)=(x^2+2x+3)q_2(x)+2r(x)$

則 $2f(x)-g(x)=(x^2+2x+3)[2q_1(x)-q_2(x)]$

$x^4+(2a-1)x^3+10x^2+(6-b)x+3=(x^2+2x+3)(x^2+kx+1)$

比較係數得 $2a-1=2+k$；$10=3+2k+1$；$6-b=3k+2$

可解得 $k=3$，$a=3$，$b=-5 \Rightarrow$ 數對 $(a,b)=(3,-5)$。

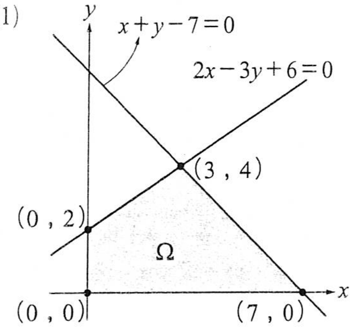
第貳部分：非選擇題

一、(1)圖略，17 平方單位；(2) 33；(3) $\frac{1}{2}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1)



可行解區域 Ω 面積為 $\frac{1}{2}\times7\times4+\frac{1}{2}\times2\times3=17$(平方單位)。

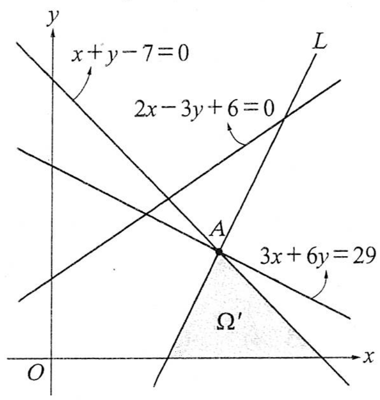
(2)使用頂點法，如下表：

(x , y)	$3x+6y$
(0 , 0)	0
(0 , 2)	12
(3 , 4)	33
(7 , 0)	21

故當 $(x , y)=(3 , 4)$ 時，$3x+6y$ 有最大值為 33。

(3)考慮 $L：x-ky=3$，當 $k=0$ 時，則 L 為 $x=3$；當 $k\neq0$，則 L 為 $y=\frac{1}{k}(x-3)$

即 L 表示一條恆過定點 (3 , 0) 的直線，則不等式 $x-ky\geq3$ 的圖解為直線 $x-ky=3$ 本身及右半區間(不包含原點)所以新不等式的可行解區域變為 Ω'。又目標函數 $3x+6y$ 的最大值為 29，不是 33，故 Ω' 不包含點 (3 , 4)，綜上所述，可得圖形如下：



$3x+6y=29$ 和 $x+y=7$ 交於 $A\left(\frac{13}{3},\frac{8}{3}\right)$，表示目標函數 $3x+6y$ 在 A 點有最大值 29，則 $L：x-ky=3$ 會通過 $A\left(\frac{13}{3},\frac{8}{3}\right)\Rightarrow\frac{13}{3}-\frac{8}{3}k=3\Rightarrow k=\frac{1}{2}$。

二、(1) $\frac{5}{9}$；(2) $\frac{2m}{m+n}$；(3) 96 顆

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值

解析：(1) $P(x=1)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\times2!=\frac{5}{9}$。

(2) $E(x)=\frac{m}{m+n}\times\frac{m-1}{m+n-1}\times2+\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}\times2!\times1+\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}\times0=\frac{2m}{m+n}$。

(3) $E(6x+5)=10 \Rightarrow 6E(x)+5=10 \Rightarrow E(x)=\dfrac{5}{6}$

$E(x)=\dfrac{2m}{m+n}=\dfrac{5}{6} \Rightarrow \dfrac{m}{m+n}=\dfrac{5}{12} \Rightarrow 7m=5n$，$m$、$n \in \mathrm{N}$，$m+n \leq 100$

令 $m=5t$，$n=7t$，$t \in \mathrm{N}$

$m+n=12t \leq 100$

$\therefore t$ 的最大值為 8

則 $m+n$ 最大值為 $12\times8=96$(顆)。

非選擇題批改原則

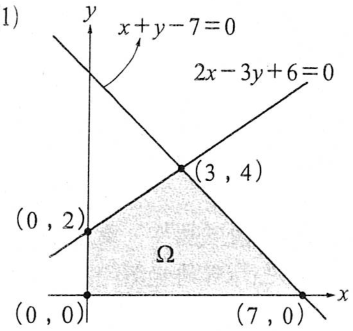
第貳部分：非選擇題

一、(1)圖略，17 平方單位；(2) 33；(3) $\dfrac{1}{2}$

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：線性規劃

解析：(1) (2 分)



可行解區域 Ω 面積為 $\dfrac{1}{2}\times7\times4+\dfrac{1}{2}\times2\times3=17$(平方單位)。 (2 分)

(2)使用頂點法，如下表：

(x , y)	$3x+6y$
(0 , 0)	0
(0 , 2)	12
(3 , 4)	33
(7 , 0)	21

(1 分)

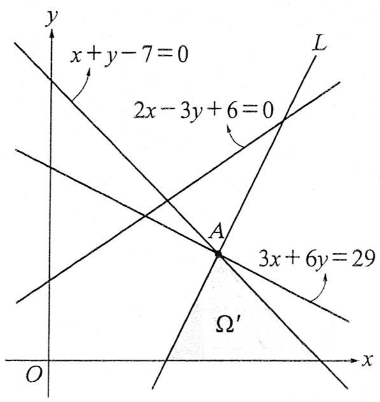
故當 $(x , y)=(3 , 4)$ 時，$3x+6y$ 有最大值為 33。 (2 分)

(3)考慮 $L：x-ky=3$，當 $k=0$ 時，則 L 為 $x=3$；當 $k\neq0$，則 L 為 $y=\dfrac{1}{k}(x-3)$ (1 分)

即 L 表示一條恆過定點 (3 , 0) 的直線，則不等式 $x-ky \geq 3$ 的圖解為直線 $x-ky=3$ 本身及右半區間(不包含原點)所以新不等式的可行解區域變為 Ω'

又目標函數 $3x+6y$ 的最大值為 29，不是 33，故 Ω' 不包含點 (3 , 4)， (1 分)

綜上所述，可得圖形如下：



$3x+6y=29$ 和 $x+y=7$ 交於 $A\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{8}{3}\right)$ (2 分)

表示目標函數 $3x+6y$ 在 A 點有最大值 29，則 $L：x-ky=3$

會通過 $A\left(\dfrac{13}{3},\dfrac{8}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{13}{3}-\dfrac{8}{3}k=3 \Rightarrow k=\dfrac{1}{2}$。 (2 分)

二、(1) $\frac{5}{9}$；(2) $\frac{2m}{m+n}$；(3) 96 顆

出處：選修數學乙(上)第一章〈機率統計〉

目標：期望值

解析：(1) $P(x=1)=\frac{5}{10}\times\frac{5}{9}\times 2!=\frac{5}{9}$。 (4 分)

(2) $E(x)=\frac{m}{m+n}\times\frac{m-1}{m+n-1}\times 2+\frac{m}{m+n}\times\frac{n}{m+n-1}\times 2!\times 1+\frac{n}{m+n}\times\frac{n-1}{m+n-1}\times 0=\frac{2m}{m+n}$。 (4 分)

(3) $E(6x+5)=10\Rightarrow 6E(x)+5=10\Rightarrow E(x)=\frac{5}{6}$

$E(x)=\frac{2m}{m+n}=\frac{5}{6}\Rightarrow\frac{m}{m+n}=\frac{5}{12}\Rightarrow 7m=5n$，$m$、$n\in\mathrm{N}$，$m+n\leq 100$ (2 分)

令 $m=5t$，$n=7t$，$t\in\mathrm{N}$

$m+n=12t\leq 100$

$\therefore t$ 的最大值為 8

則 $m+n$ 最大值為 $12\times 8=96$(顆)。 (3 分)