臺中市立高級中等學校 105 學年度指定科目第四次聯合模擬考試

數學乙考科解析

考試日期：106 年 4 月 27~28 日

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
2	5	3	4	13	35	134	45	1	2	1	2	1	8

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. ① $x \geq 2$ ，$2x-3 \geq 3 \Rightarrow x \geq 3$

② $1 \leq x \leq 2$ ，$x-1+2-x \geq 3 \Rightarrow 1 \geq 3$(不合)

③ $x \leq 1$ ，$-x+1+2-x \geq 3 \Rightarrow x \leq 0$

由①②③知，解為 $x \geq 3$ 或 $x \leq 0$

(1) $\pi \approx 3.14 > 3$

(2) $0 = \log_{106} 1 < \log_{106} 2017 < \log_{106} 106^2 = 2$

(3) $C_2^4 = 6 > 3$

(4) $\sqrt{8+\sqrt{3}} > \sqrt{8+1} = 3$

(5) $-2^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$

故選(2)

2. 設投擲此一枚不公正硬幣為正面的機率為 x

$\Rightarrow$ 投擲此兩枚相同的不公正硬幣出現兩個正面的機率為 x^2

依二項分配公式得 $120x^2 = 58.8 \Rightarrow x = 0.7$

所求 $= (0.7\times0.3+0.3\times0.7)^2 = 0.1764$ ，故選(5)

3. 假設 $f(x) = x^2+ax+b$ ，$g(x) = x^2+cx+d$

依題意，由餘式定理知

$f(1) = g(2)$ ，$f(2) = g(1) \Rightarrow \begin{cases} 1+a+b = 4+2c+d \cdots\cdots① \\ 4+2a+b = 1+c+d \cdots\cdots② \end{cases}$

①＋②　$3a+2b = 3c+2d \Rightarrow 3(a-c) = 2(d-b)$

又 $h(x) = f(x)-g(x) = (a-c)x+(b-d)$

$= -\frac{2}{3}(b-d)x+(b-d) = (b-d)(-\frac{2}{3}x+1)$

令 $y=0$ 代入，且 $f(x)$、$g(x)$ 相異

所以 $b-d \neq 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ ，故選(3)

二、多選題

4. (1) 未必，沒有足夠資訊

(2) 未必，沒有足夠資訊，例如 $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{3}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}$

(3) 未必，沒有足夠資訊

(4) 第三次出現 3 點且第四次出現 4 點的機率＝第三次出現 4 點且第四次出現 3 點的機率 $= P_3P_4$

(5) 點數和為 $2 = 1+1$ ，點數和為 $4 = 2+2 = 1+3 = 3+1$

雖然 $P_1P_1 > P_2P_2$ ，但有可能 $P_1P_1 < P_2P_2 + P_1P_3 + P_3P_1$

故選(4)

5. (1) A 民調公司在 95%信心水準下的信賴區間為[0.38 , 0.42]，其長度 0.04；B 民調公司在 95%信心水準下的信賴區間為[0.56 , 0.64]，其長度 0.08。故 B 民調公司的信賴區間比 A 民調公司的信賴區間長

(2) 設 A 民調公司所抽的樣本數為 n_A

$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{0.4\cdot(1-0.4)}{n_A}} = 0.02 \Rightarrow n_A = 2400$

(3) 設 B 民調公司所抽的樣本數為 n_B

$\Rightarrow 2\sqrt{\frac{0.6\cdot(1-0.6)}{n_B}} = 0.04 \Rightarrow n_B = 600$

(4)(5) 無法由題目得知哪家民調公司所做的結果比較可信

故選(1)(3)

6. (1) 每人每月平均薪資逐年增加，但增加的比率不相同

$\frac{45508-44359}{44359} \approx 0.026$ ，$\frac{45589-45508}{45508} \approx 0.0017$

(2) 2015 年比 2014 年減少

(3) 每人每月平均薪資逐年增加，但 2012 年的實質薪資比 2011 年少

(4) 2011 年每人每月平均薪資增加率 $\frac{45508-44359}{44359} \approx 0.026$

2014 年每人每月平均薪資增加率 $\frac{47300-45664}{45664} \approx 0.036 \ldots$ 最大

2015 年每人每月平均薪資增加率 $\frac{48490-47300}{47300} \approx 0.025$

(5) 2011 年實資薪資增加率 $\frac{45508-44989}{44989} \approx 0.012$

2014 年實資薪資增加率 $\frac{45494-44446}{44446} \approx 0.024$

2015 年實資薪資增加率 $\frac{46782-45494}{45494} \approx 0.028 \ldots$最大

故選(3)(5)

7. $\vec{v} // \vec{u} \Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$

(1) $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow (a_1{}^2+a_2{}^2)(b_l{}^2+b_2{}^2) = (a_1b_1+a_2b_2)^2$

(2) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow (a_1{}^2+b_1{}^2)(a_2{}^2+b_2{}^2) = (a_1a_2+b_1b_2)^2$

(3) 兩直線的法向量分別為 (a_1, a_2)、$(b_2, -b_1)$

$(a_1, a_2)\cdot(b_2, -b_1) = a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \Rightarrow$ 兩直線垂直

(4) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{0}{a_1} \Rightarrow$ 兩直線平行

(5) $\Delta_x = \begin{vmatrix} a_2 & 2 \\ b_2 & 3 \end{vmatrix} = 3a_2 - 2b_2$ 不一定為 0

$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$

$\Rightarrow$ 交點 $(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}) = (\frac{\Delta_x}{\Delta}, 0)$ 必在 x 軸上

故選(1)(3)(4)

8. 點 A：$\begin{cases} x=a \\ y=3a-5 \end{cases} \Rightarrow$ 點 A 為直線 $y=3x-5$ 上任何一點

且直線 $y=3x-5$ 和直線 L：$y=3x+5$ 平行

點 B 為直線 $x=3$ 上任何一點

(1)(2) A 點恆在直線 L 的下方半平面

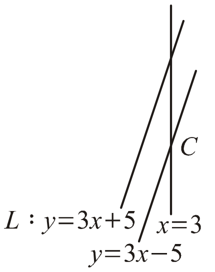
(3) A 點到直線 L 的距離可能大於、等於、小於 B 點到直線 L 的距離

(4) 直線 $y=3x-5$ 和直線 $y=3x+5$ 的距離為 $\dfrac{|-5-5|}{\sqrt{9+1}}=\sqrt{10}$

即點 A 到直線 L 的距離為 $\sqrt{10}$

若 B 點在直線 L 的上方半平面時

則 $\overline{AB}$ 長恆不小於 $\sqrt{10}$



(5) 點 B 為直線 $y=3x-5$ 和直線 $x=3$ 的交點 C，點 A 則為點 C 以外的任何點時，$\overrightarrow{AB}$ 與直線 L 平行

故選(4)(5)

三、選填題

A. $a_n=6n^2+9n+1$、$b_n=n$

$S_n=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=1+2+3+\cdots+n$

$=\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{S_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n^2+9n+1}{\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n}=12$

B. 因為 $\begin{bmatrix} a & 1-3b \\ c & b+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 為一個轉移矩陣，可得 $a\ge 0$，$c\ge 0$，

$a+c=1$，$1-3b\ge 0$，$b+\frac{1}{2}\ge 0$，$1-3b+b+\frac{1}{2}=1$，可解出 $b=\frac{1}{4}$

$\log_b a+\log_b 2c=\log_{\frac{1}{4}} a+\log_{\frac{1}{4}} 2c$

$=\log_{\frac{1}{4}} 2ac\ge \log_{\frac{1}{4}} 2(\frac{a+c}{2})^2=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

C. 考慮每種飲料的熱量

①	$A(200)$	④	$A+$珍 (250)
②	$B(120)$	⑤	$B+$珍 (170)
③	$C(70)$	⑥	$C+$珍 (120)

(1) 2 杯相同：有 5 種(①②③⑤⑥)

(2) 2 杯不同：C^6_2-2 (①＋④；④＋⑤)$=13$

共有 $5+13=18$ 種

第貳部分：非選擇題

一、(1) $x^3+ax^2+16x=x(x^2+ax+16)=0$ 必有一根為 0

但 0 不是 $x^2+ax+16=0$ 的解。可知 $x^2+ax+16=0$ 有二個相等的實根，故有 $a^2-4\times 16=0\Rightarrow a=\pm 8$

$\because a<0$，$\therefore$取 $a=-8$

(寫出 $x^2+ax+16=0$ 有二等根或 $a^2-64=0$ 可得 2 分；寫出 $a=\pm 8$ 者，可得 2 分；再寫出正確答案者，再得 2 分)

(2) 考慮 $g(x)=f(x)-x+1=x(x-4)^2-x+1$ (1 分)

①$g(-1)=-25+1+1=-23$

②$g(0)=1$

$g(1)=9-1+1=9$

$g(2)=8-2+1=7$

③$g(3)=3-3+1=1$

④$g(4)=-4+1=-3$

⑤$g(5)=5-5+1=1$

$\because g(x)=0$ 為三次多項式方程式

由勘根定理知，$g(x)=0$ (即 $f(x)=x-1$)在 $(-1,0)$、$(3,4)$、$(4,5)$之間有實根

(寫出 $g(x)=f(x)-x+1$，得 1 分；寫出①~⑤，每項得 0.5 分；寫出「勘根定理」可得 0.5 分；最後寫出正確答案再得 2 分)

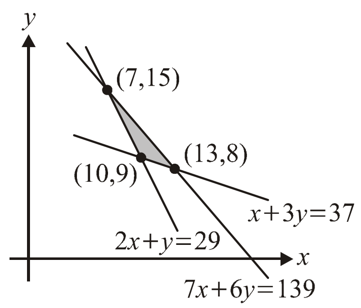
二、設甲機器購置 x 台、乙機器購置 y 台

目標 $(60x+30y)\times 180+(30x+90y)\times 120=1800(8x+9y)$ 最大 (2 分)

$\begin{cases} x，y \text{均為正整數或 } 0 \text{ (1 分)} \\ 700x+600y\le 13900 \text{ (1 分)} \\ 60x+30y\ge 870 \text{ (1 分)} \\ 30x+90y\ge 1110 \text{ (1 分)} \end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases} x, y \text{ 均為正整數或 } 0 \\ 7x+6y\le 139 \\ 2x+y\ge 29 \\ x+3y\ge 37 \end{cases}$

繪圖如下，其中陰影部分為可行解區域 (3 分)



可依頂點法或平行線法說明(7 , 15)為最佳解

即甲機器購置 7 台，乙機器購置 15 台總收入最多 (3 分)